RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

pervenute all'Accademia sino al 17 agosto 1902.

Matematica. — *Sulla teoria invariantiva delle espressioni ai differenziali totali di second'ordine, e su di una estensione dei simboli di Christoffel.* Nota del Corrispondente ERNESTO PASCAL.

L'argomento cui si riferisce questa Nota è stato da me cominciato a trattare nei due lavori: *Introduzione alla teoria invariantiva delle equazioni ai differenziali totali di second'ordine* (Ann. di Mat. (3), t. 7), e: *Un teorema della teoria invariantiva*, ecc. (Rend. Ist. Lomb. (2), t. 34, 1901), nel primo dei quali ho dimostrato l'esistenza di un invariante simultaneo di una espressione ai differenziali di second'ordine e di una espressione a derivate parziali di second'ordine, analogo al noto invariante per le forme ordinarie pfaffiane; e nel secondo ho dimostrato l'invariantività delle caratteristiche di certe matrici.

Ora mi propongo di trovare altri invarianti e forme differenziali covarianti, e di far vedere come possa costruirsi una teoria la quale può reputarsi una estensione di quella dei simboli di Christoffel relativi alle *forme differenziali quadratiche*; in simile modo otterrò poi anche, per una espressione ai differenziali secondi, l'estensione degli ordinarii *parametri differenziali*.

Dei risultati di questa Nota mi servirò in altro lavoro per trattare il problema dell'applicazione di una trasformazione infinitesima ad una espressione ai differenziali secondi.

1. È necessario richiamare brevemente i simboli e le notazioni introdotte nelle due succitate Memorie.

Sia data la espressione

$$(1) \qquad U = \sum_{k=1}^{n} X_k \, d^2 x_k + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} X_{ij} \, dx_i \, dx_j , \qquad (X_{ij} = X_{ji}) ,$$

e introduciamo i seguenti simboli:

$$(2) \qquad \begin{cases} (ij) = \dfrac{\partial X_i}{\partial x_j} - \dfrac{\partial X_j}{\partial x_i} \\ ((ij)) = \dfrac{\partial X_i}{\partial x_j} - X_{ij} \\ \{ij\} = \dfrac{\partial X_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial X_j}{\partial x_i} - 2X_{ij} , \\ \{ijk\} = \dfrac{\partial^2 X_k}{\partial x_i \, \partial x_j} + \dfrac{\partial X_{ij}}{\partial x_k} - \dfrac{\partial X_{ik}}{\partial x_j} - \dfrac{\partial X_{jk}}{\partial x_i} . \end{cases}$$

Fra questi sussistono le relazioni:

$$(3) \qquad \begin{cases} (ij) = ((ij)) - ((ji)) \\ \{ij\} = ((ij)) + ((ji)) \\ \{ijk\} = \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial}{\partial x_i} \{kj\} + \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial}{\partial x_j} \{ki\} - \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial}{\partial x_k} \{ij\} . \end{cases}$$

Operando una trasformazione di variabili, questi simboli si trasformano colle formole

$$(ij) = \sum_r \sum_s (rs)' \frac{\partial y_r}{\partial x_i} \frac{\partial y_s}{\partial x_j}$$

$$((ij)) = \sum_r \sum_s ((rs))' \frac{\partial y_r}{\partial x_i} \frac{\partial y_s}{\partial x_j}$$

$$\{ij\} = \sum_r \sum_s \{rs\}' \frac{\partial y_r}{\partial x_i} \frac{\partial y_s}{\partial x_j} ,$$

$$\{ijk\} = \sum_r \sum_s \sum_t \{rts\}' \frac{\partial y_r}{\partial x_i} \frac{\partial y_t}{\partial x_j} \frac{\partial y_s}{\partial x_k} + \sum_s \sum_t \{st\}' \frac{\partial y_t}{\partial x_k} \frac{\partial^2 y_s}{\partial x_i \, \partial x_j}$$

dove le y sono le nuove variabili, e i simboli cogli apici $'$ rappresentano i valori dei medesimi espressi nelle y; le prime di queste formole sono assai facili a trovarsi, l'ultima è stata calcolata nel secondo dei lavori succitati.

2. Si dimostra subito che *le forme differenziali quadratiche*

$$A = \sum_i \sum_j ((ij)) \, dx_i \, dx_j$$

$$B = \sum_i \sum_j \{ij\} \, dx_i \, dx_j = 2A$$

sono covarianti.

In effetti adoperando le suindicate formole di trasformazione si ha

$$A = \sum_{i,j,r,s,p,q} \dots \sum ((r\,s))'\, dy_p\, dy_q \frac{\partial y_r}{\partial x_i} \frac{dy_s}{\partial x_j} \frac{\partial x_i}{\partial y_p} \frac{\partial x_j}{\partial y_q}$$

e osservando al solito che

$$\sum_i \frac{\partial y_r}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial y_p}$$

è uguale a zero o ad 1, secondochè gli indici r, p sono diversi od uguali, e che lo stesso si ha per il $\sum_j$, si ricava che i termini non zero del precedente sommatorio sestuplo sono solo quelli in cui $p = r$, $q = s$, e quindi resta

$$A = \sum_r \sum_s ((r\,s))'\, dy_r\, dy_s ,$$

il che mostra la invariantività di A.

È utile ricordare che i covarianti quadratici A o B hanno un altro intimo legame con la data espressione ai differenziali secondi, e tal legame è quello espresso dalla formola, già trovata nella Memoria negli Annali di Matematica:

$$U = d\,V - A = dV - \frac{1}{2} B, \tag{4}$$

in cui è

$$V = \sum_i X_i\, dx_i , \tag{5}$$

e si può osservare *che anche* V *è una forma pfaffiana covariante in rapporto ad* U.

Un fatto importante ad osservare è che *il simbolo* $\{i\,j\,k\}$ *introdotto nei precedenti lavori* nei quali esso ha avuto un posto notevole, *considerato invece in rapporto alla forma differenziale quadratica* B, *si identifica col noto simbolo a tre indici di prima specie di Christoffel,* come risulta immediatamente dall' ultima delle relazioni (3).

Esso è così, considerato in rapporto alla espressione ai differenziali secondi U, una *estensione* del simbolo di Christoffel, e diventerebbe eguale a questo (moltiplicato per -2) quando la U diventasse una ordinaria forma differenziale quadratica, cioè fossero zero i coefficienti X_k.

Da questa osservazione semplicissima *risulta che tutta la teoria dei simboli di Christoffel e delle relazioni fra essi esistenti, resta estesa senz' altro al caso in cui si assume per forma fondamentale la* U. Così p. es. ricordando la nota formola (1) esistente fra i simboli a tre indici di

(1) Vedi p. es. Bianchi, *Geometria differenziale,* 2ª ediz., vol. I, pag. 66.

Christoffel, *si può dedurre fra i simboli relativi alla forma* U *la seguente relazione:*

$$(6) \qquad \sum_i \sum_j \{M'\}_{ij} \{ij\,k\} = -\frac{\partial \log \sqrt{\{M'\}}}{\partial x_k} - \sum_i \sum_j \{ik\} \frac{\partial \{M'\}_{ij}}{\partial x_i}$$

dove $\{M'\}$ rappresenta, giusta una notazione già da noi adoperata nella seconda delle Note citate in principio, il determinante degli elementi $\{i\,j\}$, e le $\{M'\}_{ij}$ rappresentano i complementi algebrici degli elementi del medesimo determinante, divisi per il determinante stesso.

D'altra parte, servendoci di un risultato da noi ottenuto più in generale nella stessa Nota (1), può enunciarsi, per gli ordinarî simboli di Christoffel, un teorema, che potrebbe dimostrarsi anche direttamente, ma che non credo ancora esplicitamente notato.

Ponendo $X_1 = X_2 = \ldots\ldots = X_n = 0$, e osservando che allora le matrici $\{M_i\}$ risultano formate mediante gli ordinarî simboli di Christoffel

$$\begin{bmatrix} i\,j \\ k \end{bmatrix},$$

si deduce che *la matrice*

$$(7) \qquad \left\| \begin{array}{cccc} 0 & X_{11} & \ldots\ldots\ldots & X_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & X_{n1} & \ldots\ldots\ldots & X_{nn} \\ X_{11} & \begin{bmatrix} 1,1 \\ 1 \end{bmatrix} & \ldots\ldots\ldots & \begin{bmatrix} 1,1 \\ n \end{bmatrix} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ X_{1n} & \begin{bmatrix} 1,n \\ 1 \end{bmatrix} & \ldots\ldots\ldots & \begin{bmatrix} 1,n \\ n \end{bmatrix} \\ X_{21} & \begin{bmatrix} 2,1 \\ 1 \end{bmatrix} & \ldots\ldots\ldots & \begin{bmatrix} 2,1 \\ n \end{bmatrix} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ X_{2n} & \begin{bmatrix} 2,n \\ 1 \end{bmatrix} & \ldots\ldots\ldots & \begin{bmatrix} 2,n \\ n \end{bmatrix} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array} \right\|$$

(1) Prendo occasione da ciò per notare che nell'enunciato del teorema alla fine del § 2 del predetto lavoro, con $\sum_i \{M_i\}$ si *deve* intendere la somma di tutti gli $\{M_i\}$, e non, come ivi si è detto, di un arbitrario numero di essi.

Inoltre, alla fine del lavoro, laddove si fa il prodotto *per colonne* della matrice (16) per la (11), bisogna invece intendere eseguito il prodotto delle due matrici, combinando le *linee* di (16) con le colonne di (11).

come anche quella ottenuta da questa colla soppressione della prima colonna, hanno caratteristiche invarianti per qualunque trasformazione di variabili.

In simile modo si può intendere anche estesa la costruzione dei *parametri differenziali* costruendo quelli in rapporto alla forma B, e considerandoli come *parametri differenziali* relativi alla espressione ai differenziali secondi U.

3. Immaginiamo ora una trasformazione infinitesimale

$$(8) \qquad \Xi f \equiv \sum_{k=1}^{n} \xi_k \frac{\partial f}{\partial x_k} .$$

Poichè le formole di trasformazione per le ξ_k sono evidentemente identiche a quelle per i differenziali dx_k, dalla invariantivilà di A , B , risulta immediatamente quella delle seguenti forme pfaffiane:

$$(9) \quad C = \sum_{ij} ((ij))\, \xi_i\, dx_j \ , \quad D = \sum_{ij} ((ij))\, \xi_i\, dx_j \ , \quad E = \sum_{ij} \}ij\{\, \xi_i\, dx_j = C + D$$

e similmente delle seguenti formazioni:

$$(10) \qquad G = \sum_{ij} ((ij))\, \xi_i\, \xi_j \ , \quad H = \sum_{ij} \}ij\{\, \xi_i\, \xi_j ,$$

Poichè le parentesi $(i\ j)$ si trasformano colle stesse formole che le $((i\ j))$, $\}i\ j\{$, alle forme pfaffiane (9) potrebbe anche aggiungersi la

$$(11) \qquad F = \sum_{ij} (ij)\, \xi_i\, dx_j = C - D$$

la quale interviene già nella teoria delle ordinarie forme pfaffiane, quando si studia il risultato dell'applicazione di una trasformazione infinitesima ad una forma di primo ordine, e che è un covariante simultaneo di V, e Ξ, mentre V, a sua volta, è un covariante di U.

Un importante *covariante di second'ordine della forma* U , è il seguente, il quale si presenta, come vedremo in seguito, nello studio dell'applicazione della trasformazione infinitesima Ξ ad U, facendo lo stesso ufficio che la F fa in rapporto a V:

$$(12) \qquad L = \sum_{k} \left[\sum_{r} \}kr\{\, \xi_r \right] d^2 x_k + \sum_{i} \sum_{j} \left[\sum_{r} \}ijr\{\, \xi_r \right] dx_i\, dx_j .$$

Trasformando infatti questa espressione nelle y, si ottiene:

$$\sum_{p,q,r,s,k} \{pq\}' \xi_s \frac{\partial y_p}{\partial x_k} \frac{\partial y_q}{\partial x_r} \frac{\partial x_r}{\partial y_s} \left[\sum_k \frac{\partial x_k}{\partial y_h} d^2 y_h + \sum_k \sum_t \frac{\partial^2 x_k}{\partial y_h \partial y_t} dy_h dy_t \right] +$$

$$+ \sum_{i,j,r,h,t} \left[\sum_{p,q} \{pq\}' \xi_s \frac{\partial y_q}{\partial x_r} \frac{\partial^2 y_p}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial x_r}{\partial y_s} + \sum_{p,q,k} \{pqh\}' \xi_s \frac{\partial y_p}{\partial x_i} \frac{\partial y_q}{\partial x_j} \frac{\partial y_k}{\partial x_r} \frac{\partial x_r}{\partial y_s} \right] \times$$

$$\times \frac{\partial x_i}{\partial y_h} \frac{\partial x_j}{\partial y_t} dy_h dy_t .$$

Ora si ha identicamente

$$(13) \qquad \sum_r \frac{\partial y_q}{\partial x_r} \frac{\partial x_r}{\partial y_s} = 0 , \qquad \text{se } q \text{ è diverso da } s$$

$$= 1 , \qquad \text{se } q \text{ è uguale a } s$$

donde si ricava, colla derivazione, un'altra formola identica, la quale, scritta con opportuno scambio di indici, è la seguente:

$$\sum_k \frac{\partial y_p}{\partial x_k} \frac{\partial^2 x_k}{\partial y_h \partial y_t} + \sum_i \sum_j \frac{\partial^2 y_p}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial x_i}{\partial y_h} \frac{\partial x_i}{\partial y_t} = 0 .$$

Con ciò si vede che la somma del secondo e terzo termine della precedente espressione è identicamente zero, ed applicando poi ripetutamente la (13) agli altri termini, si riconosce infine *la invariantività di* L.

Di qui può ricavarsi una serie di altri risultati; così p. es. immaginando una espressione alle derivate parziali di primo e second'ordine

$$(14) \qquad \Xi' f = \sum_k \xi'_k \frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_i \sum_j \xi'_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial y_j}$$

e formando l'invariante simultaneo di L e di Ξ',

$$N = \sum_k \sum_r \{k\, r\}' \xi_r \xi'_k + \sum_i \sum_j \sum_r \{i\, j\, r\}' \xi_r \xi'_{ij}$$

si ha *un nuovo invariante relativo alla forma* U *fondamentale* e che ha evidentemente come caso particolare l'invariante H.

Inoltre formando i simboli di Christoffel *estesi*, relativi alla forma L, si può con questi costruire delle nuove matrici di cui le caratteristiche sono invarianti; si può poi costruire *il covariante quadratico* di L, i suoi *parametri differenziali*, ecc., e si ha così una serie di formazioni che sono *invarianti* rispetto al sistema della forma U fondamentale e di una trasformazione infinitesima.

Come casi particolari possono poi dedursi dei teoremi relativi alle ordinarie forme differenziali quadratiche, teoremi che naturalmente potrebbero anche dimostrarsi direttamente.

Così per esempio:

La espressione ai differenziali secondi

$$\sum_k \sum_r X_{kr}\, \xi_r\, d^2x_k + \sum_i \sum_j \sum_r \begin{bmatrix} ij \\ r \end{bmatrix} \xi_r\, dx_i\, dx_j\,, \tag{15}$$

dove

$$\begin{bmatrix} ij \\ r \end{bmatrix}$$

rappresentano gli ordinarî simboli di Christoffel, è covariante simultaneo della forma differenziale quadratica

$$U' \equiv \sum_i \sum_j X_{ij}\, dx_i\, dx_j \tag{16}$$

e della trasformazione infinitesima Ξ.

La espressione ai differenziali secondi

$$\sum_k \sum_r X_{kr}\, \xi_r\, \xi'_k + \sum_i \sum_j \sum_r \begin{bmatrix} ij \\ r \end{bmatrix} \xi_r\, \xi'_{ij} \tag{17}$$

è invariante simultaneo di U' *e delle due espressioni alle derivate parziali* Ξ, Ξ'.

Formando i parametri differenziali *in senso esteso* relativi alla forma (15), si ottiene il risultato:

La espressione

$$\frac{1}{P} \sum_{ij} P_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

dove le P_{ij} *sono i complementi algebrici degli elementi* p_{ij} *del determinante* P, *e i* p_{ij} *sono formati, mediante i coefficienti della forma differenziale quadratica* U', *nel seguente modo*

$$p_{ij} = \sum_r \left[\frac{\partial X_{ij}}{dx_r}\, \xi_r + X_{ir} \frac{\partial \xi_r}{\partial x_j} + X_{jr} \frac{\partial \xi_r}{\partial x_i} \right], \tag{19}$$

è parametro differenziale relativo alla forma U' *e alla trasformazione infinitesima* Ξ.

Notiamo infine che (osservando che i differenziali dx_r si trasformano come i ξ_r) dalla invariantività di L *si deduce che*

$$(20) \qquad Q = \sum_r \sum \{k\, r\} dx_r\, d^2x_k + \sum_i \sum_j \sum_r \{i\, j\, r\} dx_r\, dx_i\, dx_j$$

è un altro covariante di 2° ordine relativo alla forma ai differenziali secondi U; e quindi anche che

$$(21) \qquad \sum_k \sum_r X_{kr}\, dx_r\, d^2x_k + \sum_i \sum_j \sum_r \begin{bmatrix} ij \\ r \end{bmatrix} dx_r\, dx_i\, dx_j$$

formato mediante i simboli di Christoffel, è covariante della forma differenziale quadratica U'.

Geologia. — *I terreni eocenici dei dintorni di Metkovich in Dalmazia e in Erzegovina* (1). Nota del Socio C. De Stefani e del dott. A. Martelli.

Sulla destra della Narenta il calcare eocenico è già segnato a Vido e secondo il prof. De Stefani si estende anche a Gabela, mentre dei terreni di Metkovich a sinistra della stessa Narenta è soltanto indicato, nelle carte geologiche attualmente esistenti, un lembo assai più a sud del paese. Tale lembo eocenico viene giustamente dallo Stache (2) attribuito all'*Hauptalveolinen- und Nummulitenkalk.*

Della fauna eocenica di Metkovich, a proposito di un confronto fra i depositi nummulitici del Friuli e quelli della Dalmazia, viene fatto un fugace accenno in un lavoro del prof. O. Marinelli (3) il quale ebbe occasione di esaminare parte del materiale raccolto dal prof. De Stefani.

Formazioni cretacee.

La metà orientale di Metkovich si trova sopra una strettissima e regolare piega anticlinale cretacea, diretta, come le altre della regione, da N.O.

(1) La parte stratigrafica è del prof. De Stefani, la parte paleontologica del dott. Martelli. I fossili di Sibanica e di Krupa ci vennero forniti dal prof. Gasperini di Spalato che sentitamente ringraziamo.

(2) Stache G. *Die liburnische Stufe und deren Grenz-Horizonte.* Abhand. der k. k. geolog. Reichsanstalt, Band XIII Wien 1899.

(3) Marinelli O. *Descrizione geologica dei dintorni di Tarcento nel Friuli.* Pubb. del R. Ist. di Studi sup. pratici e di perfez. Firenze 1902, pag. 71.

a S.E. e costituita da un calcare bianco sporco con *Radiolites* ed altri fossili frammentizi. L'anticlinale in parola è regolare, perchè mentre gli strati sono diretti da N.O. a S.E., a ponente e a mezzogiorno di Metkovich pendono di 60° a S.O., e a levante sono immersi a N.E. Quasi immediatamente da una parte e dall'altra succedono i terreni eocenici; a distanza, tanto a levante nella valle della Krupa in Erzegovina quanto dall'altra parte a S.O. presso S. Antonio in Dalmazia, e un poco più a valle lungo la Narenta, si ritrovano le adiacenti pieghe anticlinali cretacee con la già menzionata orientazione.

Per tal modo, i terreni eocenici che noi stiamo per prendere in considerazione, occupano due abbastanza larghi e regolari sinclinali.

La concordanza fra le diverse roccie è perfetta, però la presenza di parziali flessioni ed inversioni fa prova delle rilevanti pressioni a cui la regione è stata soggetta.

Gli strati cretacei di S. Antonio contengono *Hippurites lumbricalis* D'Orb., numerose *Radiolites* ed altre specie in parte ben conservate, in parte pure in frammenti piccolissimi, insieme con radioli di *echini* e con traccie di *crinoidi*, *corallari* ecc. La roccia consta del solito calcare subcristallino e ceroide che costituisce la Creta superiore nella Morea, nelle isole adiacenti, nel littorale Albanese, in Dalmazia, al Gargano e nell'Appennino centrale, e che per essere qui poco marnoso e meno sfaldabile di quello nummulitico, si copre difficilmente di vegetazione.

In alcuni strati più marnosi compaiono anche degli *Inocerami* con rudiste frammentizie e in quelli superiori, per una trentina di metri, si hanno esemplari di *Hippurites* del tipo della *H. organisans* Mont., ed altre rudiste che però non si prestano ad una sicura determinazione specifica.

Formazione eocenica.

I. Dalla parte di S. Antonio succede concordante sulla Creta, il calcare con *Miliolinae* e con piccole *Alveolinae*.

La stessa formazione comparisce nella parte opposta dell'anticlinale di Metkovich, non molto oltre il paese ma prima di arrivare al confine erzegovese, con un calcare marnoso grigio o più spesso color avana chiaro con *Miliolinae* e con rarissime *Alveolinae* e con gasteropodi e lamellibranchi mal conservati, nel quale alternano schisti galestrini e calcari marnosi molto friabili.

II. Tornando dalla parte di S. Antonio, superiormente, per cinquanta metri di altezza, abbondano nella stessa roccia calcarea le grosse Alveoline, ora più ora meno abbondanti. La roccia è bianchiccia, non cristallina e pendente circa 60° a S.O. Vi abbiamo distinto numerosi esemplari delle

seguenti specie, comuni alla parte media e superiore dell'eocene inferiore.

Alveolina ellipsoidalis Schwag.
Alveolina oblonga d'Orb.
Alveolina ovolum Stache.
Alveolina frumentiformis Schwag.
Orbitulites confr. *Pharaonum* Schwag.

A levante dell'anticlinale di Metkovich, al confine erzegovese, sopra ai calcari a Milioline si ripete questo medesimo calcare sempre marnoso con abbondanti *Alveoline*, piccole *Ostreae* ed altri bivalvi, e seguita fino all'estremo settentrionale del paese di Doljane in Erzegovina, con frequenti alternanze di strati calcarei senza fossili.

Nelle assise più alte sono *Ostreae* abbastanza comuni, *Modiolae*, *Cardium*, *Turbo*, difficili però ad isolarsi. Non vi compaiono le nummuliti.

III. Ancora dalla parte di S. Antonio, sopra al calcare ora considerato, ne succede un altro, consimile per i caratteri litologici, con grosse *Alveolinae* e piccole e rare *Nummulites* che non abbiamo potuto determinare con sicurezza a causa della difficoltà di isolarle. Non escludiamo però che possa trattarsi della coppia *Nummulites elegans* Sow.-*N. planulata Lamk.* propria del livello inferiore delle nummuliti (piano Ypresiano) nel qual caso questa roccia con grosse alveoline e piccole nummuliti ci attesterebbe con tutta probabilità la presenza di formazioni riferibili alla parte più alta dell'Eocene inferiore, mentre la sottostante a sole grosse alveoline ne rappresenterebbe la parte media.

IV. Proseguendo ancora, presso S. Antonio succede un calcare con *Nummulites* e *Assilinae*, ma senza Alveoline, mentre inferiormente le Assiline mancano affatto.

Nello stesso sinclinale, dalla parte di Metkovich, poco oltre il paese al piede del poggio di Gledavac, si ha il medesimo calcare con Nummuliti e abbondanti Assiline; esso è alquanto marnoso, gialliccio chiaro, e con frequenti alternanze non solo di straterelli di marne assai ben distinti senza però far passaggio a vero *Flysch*, ma anche di qualche strato di calcare più compatto privo di fossili e somigliante all'*Alberese* dell'Appennino.

Ordinariamente questo calcare nummulitico è compatto come quello di Sebenico, di Scardona, di Busi e di altre parti della Dalmazia, ma non di rado i fossili si sfanno e restano completamente isolati sul terreno. In abbondanza il De Stefani vi ha raccolto esemplari delle seguenti specie:

Nummulites Lamarcki d'Arch. et H.
N. laevigata Lamk. var. *scabra* Lamk. (forma subglobosa e forma depressa).
N. laevigata Lamk. var. *astyla* Tell.

Nummulites subitalica Tell.
N. italica Tell.
N. Lucasana Defr. (tipo).
N. Lucasana Defr. var. *depressa* d'Arch. et H.
N. Lucasana Defr. var. *granulata* de la Harpe.
N. Lucasana Defr. var. *Meneghinii* d'Arch. et H.
N. Lucasana Defr. var. *obsoleta* de la Harpe.
N. perforata d'Orb. var. *aturensis* d'Arch. et H.
N. perforata d'Orb. var. *Renevieri* de la Harpe.
N. perforata d'Orb. var. *granulata* Tell.
N. perforata d'Orb. var. *obesa* Leym.
N. Guettardi d'Arch. et H.
N. biaritzensis d'Arch.
N. sub-Beaumonti de la Harpe.
N. Beaumonti d'Arch. et H.
Nummulites sp. nov.
Assilina subspira de la Harpe.
A. spira de Roissy.
A. mamillata d'Arch. var. *plicata* de la Harpe.
A. mamillata d'Arch. var. *granulosa* de la Harpe.
A. exponens Sow. var. *plicata* de la Harpe.
A. exponens Sow. var. *granulosa* d'Arch. et H.

È interessante notare come in questa zona non apparisca mai la coppia *N. Tchihatcheffi-complanata*, che ordinariamente trovasi infatti ad un livello più alto.

Dalla continuazione dei medesimi strati poco più a sud, da Šibanica (*Šibovnica* della carta) sul confine erzegovese, proviene la piccola collezione di nummuliti disgregate inviataci gentilmente in comunicazione dell'egregio prof. Riccardo Gasperini di Spalato; essa ci ha infatti mostrato una identità specifica e numerica quasi perfetta, con le forme di nummulitidi ora citate per i pressi di Metkovich e di Gledavac — S. Antonio.

Una breve zona di calcari con rare *Nummulites* e detriti di altri fossili, sembra occupare il mezzo del sinclinale a ponente di Metkovich.

V. A levante di Metkovic dalla parte dell'Erzegovina ed oltre Doljane, dopo una brevissima interruzione corrispondente alla zona IV, in un tratto di terreno sul quale non si è portata la nostra personale osservazione, succedono gli strati nummulitici di Dracevo e Krupa, delle cui nummuliti disgregate ci ha procurato un'altra piccola collezione il prof. Gasperini. Riportiamo la nota delle specie da noi determinate:

Nummulites Lucasana Defr. (tipo).
N. Lucasana Defr. var. *obsoleta* de la Harpe.

Nummulites Lucasana Defr. var. *depressa* d'Arch. et H.
N. Lucasana Defr. var. *granulata* de la Harpe.
N. perforata d'Orb. var. *aturensis* d'Arch. et H.
N. perforata d'Orb. var. *obesa* Leym.
N. perforata d'Orb. var. *Renevieri* de la Harpe.
N. perforata d'Orb. var. *granulata* Tell.
N. Molli d'Arch. var. *Verbeeki* Tell.
N. Brongniarti d'Arch. et H.
N. subdiscorbina de la Harpe.
N. discorbina Schloth.
N. Tchihatcheffi d'Arch. et H.
N. complanata Lamk.
N. latispira Menegh.
N. distans Desh.

La divisione che lo Stache (1) adotta per l'antico terziario dell' Istria e della Dalmazia, può applicarsi in modo generale anche nei dintorni di Metkovich, nei quali — eccezione fatta per le formazioni salmastre che nell' Istria susseguono alla Creta e che qui mancano — si trova il calcare ad alveoline alla base dell'*Hauptnummulitenkalk*. Senonchè, la divisione di Stache è troppo lata specialmente per l'orizzonte delle due *N. perforata* e *complanata* che egli riunisce insieme, e che, quando realmente siano accompagnate, come per esempio al Monte Marian di Spalato e a Krupa in Erzegovina, corririspondono soltanto al Luteziano superiore e non a piani più antichi.

Dal classico lavoro del De la Harpe sopra le nummulitidi d' Egitto e del deserto libico (2) e da quello del Tellini sulle nummulitidi della Maiella, del Gargano e delle isole Tremiti (3) risulta come non si possano dividere i terreni nummulitici di quelle regioni in tanti livelli distintamente caratterizzati da specie peculiari di nummulitidi. E così anche dallo studio dei terreni nummulitici di Spalato noi ci siamo convinti come solo l'aggruppamento delle specie, secondo i criterî che hanno guidato lo stesso De la Harpe (4) a stabilire la sua scala delle nummuliti, possa condurre con tutta probabilità all'esatto riconoscimento dell'orizzonte.

(1) Stache G., op. cit. pag. 56.

(2) De la Harpe Ph., *Monographie der in Aegypten und der lybischen Wüste vorkommenden Nummuliten.* Palaeontographica 1883.

(3) Tellini A. *Le Nummulitidi della Maiella, delle isole Tremiti e del Gargano.* Boll. Soc. Geol. It. Vol. X (1890).

(4) De la Harpe Ph. *Étude des Nummulites de la Suisse.* Mém. de la Soc. Paléont. Suisse, vol. VII, pag. 76.

Il complesso delle citate forme ci porta a conchiudere che nei dintorni di Metkovich, almeno per i livelli stratigrafici più bassi dell'*Hauptnummulitenkalk*, si osserva una successione di nummuliti che non si scosta molto da quella normale. Vi troviamo infatti da prima abbondanza di quelle principali specie subreticolate (*N. Lamarcki* e *laevigata*) e granulate (*N. Lucasana* e *perforata*) che ovunque, *quando non si trovano insieme alla coppia N. Tchihatcheffi-complanata*, rappresentano le formazioni più basse dell'eocene medio passando poi a caratterizzare anche la parte media dello stesso eocene medio o Luteziano, quando le Assiline si associano ad esse in gran numero.

Riconosciuto quindi nei dintorni di Metkovich il graduale passaggio dalla base dell'eocene al Luteziano medio, si comprende pure come i menzionati terreni si completino infine, mercè l'intervento della *N. Tchihatcheffi* e *complanata*, con quelli immediatamente più alti di Krupa e di Spalato.

Senza dilungarci in superflui dettagli, riassumiamo nel presente quadro la successione dei terreni eocenici di Metkovich e Spalato, secondo le nostre attuali osservazioni e secondo quelle riportate in una precedente Nota (1).

	PIANI	FACIES	TERRENI	
			Dintorni di Metkovich	Dintorni di Spalato
Eocene medio	Luteziano superiore	Calcari nummulitici con *N. Tchihatcheffi* e *complanata*.	Krupa, Dracevo (Erzegovina).	S. Stefano e Botticelle. Monte Marian.
				Spalato.
	Luteziano medio . .	Calcari compatti e disgregabili con prevalenza di Assiline e Nummuliti granulose.	Sibanica. Occidente del Geedavac presso S. Antonio a levante e a mezzogiorno. Sud di Metkovich.	Salona.
	Luteziano inferiore	Calcari con prevalenza di Nummuliti subreticolate.		
Eocene inferiore	Ypressiano	Calcare a grosse Alveoline e piccoli Nummuliti.	Fra Metkovich e S. Antonio. Al confine erzegovese.	
	Sparnaciano.	Calcare a grosse Alveoline.	Gabela. Doljane. Fra Metkovic e S. Antonio. Colline alla foce della Narenta.	
	Tanetiano	Calcare a Milioline e piccole Alveoline.	Ad oriente di Metkovich prima di giungere al confine erzegovese.	Calcare grigio avana tra Salona e Clissa.

Adottiamo convenzionalmente la classificazione del De Lapparent, senza pregiudicare nessuna di quelle questioni che in proposito potrebbero sollevarsi.

(1) Martelli A. *I terreni nummutitici di Spalato in Dalmazia*. Rend. R. Acc. dei Lincei, vol. XI, pag. 334 (Sez. sc. mat. fis. e nat. Seduta del 20 aprile 1902).

Matematica. — *Alcuni teoremi che possono tener luogo di quello della media, per funzioni le cui derivate non sono atte alla integrazione definita.* Nota del prof. Ettore Bortolotti, presentata dal Socio L. Bianchi.

In questa Nota mi propongo di determinare delle condizioni sufficienti per la validità della formula

$$\int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx \leqq f(x) - f(x_0),$$

o dell'altra

$$\int_{x_0}^{x} \psi(x)\,dx \geqq f(x) - f(x_0)$$

(φ, ψ funzioni integrabili nell'intervallo $(x_0, \ldots x)$), nei casi in cui non è noto se la $f'(x)$ sia integrabile nell'intervallo $(x_0, \ldots x)$, ma si sa che, fatta tutto al più eccezione dai punti di un insieme discreto, è ivi soddisfatta l'una o l'altra (o l'una e l'altra) delle condizioni:

$$\varphi(x) \leqq f'(x) \quad , \quad \psi(x) \geqq f'(x).$$

Benchè le osservazioni del Dini ed i noti esempî del Volterra e del Kopcke relativi a funzioni che hanno derivata in tutti i punti di un determinato intervallo, senza che questa derivata sia ivi atta alla integrazione definita, si riferiscano a funzioni che fanno infinite oscillazioni; non si può con sicurezza affermare che non vi sieno anche funzioni monotone le cui derivate non sono atte alla integrazione definita.

Incomincierò perciò dal considerare il caso di funzioni monotone, che è quello che presenta minori difficoltà ed ha importanza maggiore.

1. Teorema I. — *Sia $f(x)$ una funzione della variabile reale x, ad un valore, monotona, finita e derivabile in tutti i punti di un intervallo finito $(x_0, \ldots x)$, si conoscano due funzioni φ, ψ atte alla integrazione definita in quel medesimo intervallo e, in ogni punto di esso, sia soddisfatta l'una o l'altra (o l'una e l'altra) delle due relazioni:*

$$(1) \qquad \varphi(x) \leqq |f'(x)| \quad , \quad |f'(x)| \leqq \psi(x).$$

Dico che, indipendentemente dalla integrabilità della $f'(x)$, si ha corrispondentemente:

$$(2)\qquad \int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx \leqq |f(x)-f(x_0)| \quad ; \quad |f(x)-f(x_0)| \leqq \int_{x_0}^{x} \psi(x)\,dx\,.$$

Si divida infatti l'intervallo $(x_0, \dots x)$ in un numero arbitrario di tratti $(x_0, \dots x_1), (x_1, \dots x_2), \dots (x_n, \dots x)$. Chiamando δ_s l'ampiezza del tratto $(x_s, \dots x_{s+1})$, $(s = 0, 1, 2 \dots n,\ x_{n+1} = x)$, si ha:

$$(3)\qquad \begin{cases} |f(x_{s+1})-f(x_s)| = \delta_s |f'(\xi_s)| \\ (s = 0, 1, \dots n,\ x_s \leqq \xi_s \leqq x_{s+1})\,. \end{cases}$$

Dalle (1) si ricava:

$$(4)\qquad \delta_s \varphi(\xi_s) \leqq \delta_s |f'(\xi_s)| \quad , \quad \delta_s |f'(\xi_s)| \leqq \delta_s \psi(\xi_s)\,,$$

dunque:

$$\begin{cases} \delta_s \varphi(\xi_s) \leqq |f(x_{s+1})-f(x_s)| \quad , \quad |f(x_{s+1})-f(x_s)| \leqq \delta_s \psi(\xi_s) \\ (s = 0, 1 \dots n,\ x_s \leqq \xi_s \leqq x_{s+1}) \end{cases}$$

e, sommando:

$$\begin{cases} \sum_{s=0}^{n} \delta_s \varphi(\xi_s) \leqq \sum_{s=0}^{n} \left|f(x_{s+1})-f(x_s)\right| \quad , \quad \sum_{s=0}^{n} \left|f(x_{s+1})-f(x_s)\right| \sum_{s=0}^{n} \delta_s \psi(\xi_s)\,. \\ s = 0, 1, \dots n,\ x_s \leqq \xi \leqq x_{s+1} \end{cases}$$

Essendo ora la $f(x)$ monotona, le differenze $f(x_{s+1}) - f(x_s)$ hanno tutte il medesimo segno, epperò:

$$\sum |f(x_{s+1})-f(x_s)| = |f(x)-f(x_0)|$$

ed anche:

$$(5)\qquad \begin{cases} \sum_{s=0}^{n} \delta_s \varphi(\xi_s) \leqq |f(x)-f(x_0)| \quad , \quad |f(x)-f(x_0)| \leqq \sum_{s=0}^{n} \delta_s \psi(\xi_s) \\ s = 0, 1, \dots n,\ x_s \leqq \xi_s \leqq x_{s+1} \end{cases}$$

Di qui, per le ipotesi poste, si ricava appunto:

$$\int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx \leqq |f(x)-f(x_0)| \quad , \quad |f(x)-f(x_0)| \leqq \int_{x_0}^{x} \psi(x)\,dx\,.$$

2. Il teorema ora dimostrato giustifica le deduzioni fatte ai nn. 17 e 21 della Memoria: *Sulla determinazione dell'ordine di infinito* (Atti della Società dei naturalisti e matematici di Modena, a. 1901).

3. Teorema II. — *La funzione $f(x)$ della variabile reale x, sia ad un valore, monotona, finita, derivabile in tutti i punti dell'intervallo $(x_0, \ldots x)$. Sieno φ e ψ due funzioni atte alla integrazione definita, in quel medesimo intervallo. Se in ogni tratto arbitrariamente piccolo $(x_s, \ldots, x_{s+1})$ $x_0 \leqq x_s < x_{s+1} \leqq x$, il limite inferiore dei valori della φ non è maggiore di quello dei valori assoluti della $f'(x)$; od* (ed) *il limite superiore di questi valori assoluti non è maggiore di quello della ψ in quel tratto, si avrà, indipendentemente dalle integrabilità della $f'(x)$:*

$$\int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx \leqq |f(x) - f(x)| \quad , \quad |f(x) - f(x_0)| \leqq \int_{x_0}^{x} \psi(x)\,dx .$$

4. Teorema III. — *Sia $(x_0, \ldots x)$ un intervallo dove la $f(x)$ è ad un valore, monotona, finita e derivabile e le φ e ψ sono integrabili assolutamente* (1). *Consideriamo l'insieme* K *dei punti che rimangono in quell'intervallo dopo che se ne è sottratto un insieme discreto Ξ* (2) *e supponiamo che il limite inferiore dei valori che la φ assume nei punti di* K *che sono situati in un tratto qualunque $(x_s, \ldots x_{s+1})$ $x_0 \leqq x_s < x_{s+1} \leqq x$, dell'intervallo dato, non sia maggiore del limite inferiore dei valori assoluti della $f'(x)$ in quei medesimi punti, o* (e) *che il limite superiore di quei valori assoluti della $f'(x)$, non sia maggiore del corrispondente limite superiore della ψ.*

Sarà soddisfatta l'una o l'altra (l'una e l'altra) delle due relazioni:

$$\int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx \leqq |f(x) - f(x_0)| \quad , \quad |f(x) - f(x_0)| \leqq \int_{x_0}^{x} \psi(x)\,dx .$$

Ad ogni numero ε positivo, arbitrario, possiamo far corrispondere una scomposizione dell' intervallo $(x_0, \ldots x)$ in un numero finito di tratti, con la condizione che, la somma $\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_p$ delle lunghezze dei tratti

$$(x_1, \ldots x_1 + \delta_1) \ , \ (x_2, \ldots x_2 + \delta_2) , \ldots (x_p, \ldots x_p + \delta_p) ,$$

che contengono punti di Ξ sia minore di ε.

Anche ciascuno dei numeri $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p$ può dunque essere supposto minore di ε.

Tenendo conto delle ipotesi poste per la f e per le φ e ψ, potremo,

(1) Cfr. Stolz, Wien. Berichte, 107, 108. Vedi anche E. H. Moore, *Of improper definite integrals*, Trans. American. Math. Soc., vol. 2, n. 3, pagg. 296-330; vol. 2, n. 4, pagg. 459-475 (1901).

(2) Cfr. la mia Nota: *Contributo alla teoria degl'insiemi*, n. 1.

ad ogni numero positivo σ, far corrispondere un ε abbastanza piccolo perchè sieno contemporaneamente minori di σ le tre somme [1]:

$$(6)\quad \begin{cases} S = |f(x_1+\delta_1)-f(x_1)|+|f(x_2+\delta_2)-f(x_2)|+\cdots+|f(x_p+\delta_p)-f(x_p)|, \\ S_1 = \left|\int_{x_1}^{x_1+\delta_1}\varphi(x)\,dx\right|+\left|\int_{x_2}^{x_2+\delta_2}\varphi(x)\,dx\right|+\cdots+\left|\int_{x_p}^{x_p+\delta_p}\varphi(x)\,dx\right| \\ S_2 = \left|\int_{x_1}^{x_1+\delta_1}\psi(x)\,dx\right|+\left|\int_{x_2}^{x_1+\delta_2}\psi(x)\,dx\right|+\cdots+\left|\int_{x_p}^{x_p+\delta_p}\psi(x)\,dx\right|. \end{cases}$$

Siccome poi negli intervalli

$$(x_0,\ldots x_1)\ ,\ (x_1+\delta_1,\ldots x_2),\ldots(x_p+\delta_p,\ldots x)$$

sono soddisfatte le condizioni richieste nell'enunciato del teorema II, avremo le relazioni:

$$(7)\quad \begin{cases} \int_{x_0}^{x_1}\varphi(x)\,dx \leqq |f(x_1)-f(x_0)| \ , \ |f(x_1)-f(x_0)| \leqq \int_{x_0}^{x_1}\psi(x)\,dx \\ \int_{x_1+\delta_1}^{x_2}\varphi(x)\,dx \leqq |f(x_2)-f(x_1+\delta_1)| \ , \ |f(x_2)-f(x_1+\delta_1)| \leqq \int_{x_1+\delta_1}^{x_2}\psi(x)\,dx \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \int_{x_p+\delta_p}^{x}\varphi(x)\,dx \leqq |f(x)-f(x_p+\delta_p)| \ , \ |f(x)-f(x_p+\delta_p)| \leqq \int_{x_p+\delta_p}^{x}\psi(x)\,dx. \end{cases}$$

Tenendo conto delle (6) e del fatto che la $f(x)$ è monotona, si ha:

$$(8)\quad \begin{cases} \int_{x_0}^{x_1}\varphi(x)\,dx+\int_{x_1+\delta_1}^{x_2}\varphi(x)\,dx+\cdots+\int_{x_p+\delta_p}^{x}\varphi(x)\,dx \geqq \int_{x_0}^{x}\varphi(x)\,dx-S_1 \\ \int_{x_0}^{x_1}\psi(x)\,dx+\int_{x_p+\delta_p}^{x_2}\psi(x)\,dx+\cdots+\int_{x_p+\delta_p}^{x}\psi(x)\,dx \leqq \int_{x_0}^{x}\psi(x)\,dx+S_2 \\ |f(x_1)-f(x_0)|+|f(x_2)-f(x_1+\delta_1)|+\cdots+|f(x)-f(x_p+\delta_p)| = \\ \quad = |f(x)-f(x_0)|-S. \end{cases}$$

Da queste, e dalle (7), si ricava:

$$(9)\quad \begin{cases} \int_{x_0}^{x}\varphi(x)\,dx-(S_1-S) \leqq |f(x)-f(x_0)|, \\ |f(x)-f(x_0)| \leqq \int_{x_0}^{x}\psi(x)\,dx+(S+S_2). \end{cases}$$

[1] Cfr. p. e. E. H. Moore, loc. cit., pag. 310. La Memoria del Moore contiene anche copiose notizie bibliografiche, alle quali rimando per le citazioni su questo argomento.

Ricordando che, indipendentemente dai valori delle espressioni $\int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx$, $\int_{x_0}^{x} \psi(x)\,dx$, $|f(x) - f(x)|$, le quantità positive S, S_1, S_2, possono farsi piccole a piacere, possiamo dalle (9) dedurre le relazioni richieste:

$$\int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx \leqq |f(x) - f(x_0)| \quad , \quad |f(x) - f(x_0)| \leqq \int_{x_0}^{x} \psi(x)\,dx .$$

Questo teorema non esclude che nei punti di un insieme discreto Ξ, le funzioni f', φ, ψ, possono assumere valori nulli od infiniti.

4. Per le funzioni non monotone i teoremi precedenti possono cessare dall'essere validi. Si hanno però sempre i teoremi seguenti:

Teorema IV. — *Se $f(x)$ è una funzione della variabile reale x, ad un valore finita, continua, derivabile in un dato intervallo $(x_0, \ldots x)$; se esiste una funzione $\psi(x)$ integrabile assolutamente* [1] *nello stesso intervallo, con la proprietà che, fatta tutto al più eccezione dai punti di un insieme discreto Ξ, in ogni tratto $(x_s, \ldots x_s + \delta_s)$, per quanto si voglia piccolo di $(x_0, \ldots x)$, il limite superiore dei valori assoluti della $f'(x)$, non sia maggiore del limite superiore L_s delle ψ, si ha la relazione:*

$$|f(x) - f(x_0)| \leqq \int_{x_0}^{x} \psi(x)\,dx .$$

La dimostrazione si fa osservando che, in ogni intervallo $(x_s, \ldots x_s + \delta_s)$ non contenente punti di Ξ si ha

$$\begin{cases} |f(x_s + \delta_s) - f(x_s)| = \delta_s |f'(\xi_s)| \leqq \delta_s L_s \\ x_s \leqq \xi_s \leqq x_s + \delta_s , \end{cases}$$

e che

$$|\Sigma f(x_s + \delta_s) - f(x_s)| \leqq \Sigma |f(x_s + \delta_s) - f(x_s)| \leqq \Sigma \delta_s L_s .$$

Teorema V. — *Sia $(x_0, \ldots x)$ un intervallo dove la funzione $f(x)$ è ad un valore finita, continua, derivabile, e le funzioni φ, ψ sono assolutamente integrabili.*

Indichiamo con K *l'insieme dei punti che rimangono in quell'intervallo, dopo che se ne è sottratto un insieme discreto Ξ, e supponiamo*

[1] Cfr. Stolz, *Grundzüge*, vol. 3 (1899) pag. 122 e segg. Moore, *Of improper definite integrals* (Trans. of the. Am. Math. Soc. (1901), pag. 322.

che il limite inferiore l_s dei valori che la φ assume nei punti appartenenti a K *e situati in un tratto qualunque* $(x_s, \dots x_{s+1})$, $x_0 \leqq x_s < x_{s+1} \leqq x$, *dell'intervallo* $(x_0, \dots x)$, *non sia maggiore del limite inferiore dei valori che la* f' *ha in quegli stessi punti,* o (e) che, *il limite superiore di questi valori, non sia maggiore del corrispondente limite superiore* L_s *della* ψ, *si avrà l'una o l'altra (l'una e l'altra) delle relazioni seguenti:*

$$(10) \qquad \int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx \leqq f(x) - f(x_0) \quad , \quad f(x) - f(x_0) \leqq \int_{x_0}^{x} \psi(x)\,dx .$$

L' importanza pratica di questo teorema è molto minore di quella del teorema III poichè qui, anche quando le (10) sieno entrambe soddisfatte e sieno finiti e diversi dallo zero i due integrali $\int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx$, $\int_{x_0}^{x} \psi(x)\,dx$, non si può affermare che sia diversa dallo zero anche la differenza $f(x) - f(x_0)$ se non nel caso che quei due integrali abbiano lo stesso segno.

La seconda di quelle relazioni, non può poi da sola assicurarci che non sia infinito il valore assoluto $|f(x) - f(x_0)|$.

Il teorema si dimostra partendo dalla relazione

$$\begin{cases} l_s \leqq f(\xi_s) \leqq L_s \\ x_s \leqq \xi_s \leqq x_s + \delta_s \end{cases}$$

con considerazioni analoghe a quelle svolte al teorema III. Basta soltanto, conservando le notazioni (6), sostituire l'ultima delle formule (8) con la seguente:

$$f(x) - f(x_0) - S \leqq f(x_1) - f(x_0) +$$
$$+ f(x_2) - f(x_1 + \delta_1) + \dots + f(x) - f(x_p + \delta_p) \leqq f(x) - f(x_0) + S ,$$

ed al posto delle (9) scrivere le seguenti:

$$\int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx - (S_1 + S) \leqq f(x) - f(x_0) \ , \ f(x) - f(x_0) \leqq \int_{x_0}^{x} \psi(x)\,dx + S_2 + S .$$

I risultamenti a cui sono giunto in questa Nota e nella precedente che ha il titolo: *Contributo alla teoria degli insiemi*, servono di preparazione allo studio del problema seguente:

Due funzioni f, φ, *della variabile reale* x, *uniformi, finite, derivabili nei punti di un determinato intorno di un punto* $x = a$, *sono, nel punto a stesso, entrambe infinite od infinitesime.*

Il quoziente delle derivate: $\frac{f'}{\varphi'}$, *in tutti i punti di un insieme* K *contenuto in quell'intorno, soddisfa una relazione della forma:*

$$\mu \leqq \left| \frac{f'}{\varphi'} \right| \leqq \mathrm{M},$$

μ, M, *numeri positivi. Nei punti* $[\xi]$ *dell'intorno considerato, non appartenenti a* K, *quel quoziente può invece assumere valori arbitrari.*

Si domanda qual relazione occorre e basta che interceda fra le dimensioni degli insiemi K, $[\xi]$, *perchè il quoziente* $\frac{f}{\varphi}$ *delle funzioni date soddisfi, in tutti i punti di un determinato intorno del punto* $x = a$, *la relazione:*

$$\nu \leqq \left| \frac{f}{\varphi} \right| \leqq \mathrm{N},$$

ν, N, *numeri positivi.*

La risoluzione di questo problema ed alcune applicazioni alla determinazione dell'ordine di infinito, si trovano in una memoria che è in corso di stampa negli Annali di matematica.

Matematica. — *Su una classe di equazioni a radici reali.* Nota di Onorato Niccoletti, presentata dal Socio L. Bianchi.

Una delle più semplici dimostrazioni della realtà delle radici della equazione *secolare* (da cui dipende ad es. la determinazione degli assi di una quadrica a coefficienti reali di un S_n) è fondata sull'ortogonalità di due *direzioni principali* corrispondenti a radici diverse della equazione stessa. Quest'osservazione, convenientemente estesa, vale in molti altri casi e conduce ad una classe di equazioni, e di sistemi di equazioni, a radici tutte reali, di cui l'equazione secolare è caso particolarissimo. Mi permetto di comunicare alla R. Accademia i risultati ottenuti per questa via, riserbandomi di darne in altro luogo le dimostrazioni.

1. Una forma bilineare in $2n$ variabili $x_1, x_2, \ldots x_n, y_1, y_2, \ldots y_n$, $\mathrm{A} = \sum_{1}^{n}{}_{\mu\nu} a_{\mu\nu} x_\mu y_\nu$ si dice di *Hermite* e di *prima* (*seconda specie*) quando per tutti i valori degli indici μ e ν i coefficienti $a_{\mu\nu}$ e $\pm a_{\nu\mu}$ sian numeri complessi coniugati, sia cioè, con simboli noti, $\bar{a}_{\mu\nu} = \pm a_{\nu\mu}$. Una forma di Hermite di seconda specie si cambia in una di prima, moltiplicandola per i

e inversamente: dando alle variabili x_μ , y_μ valori complessi coniugati, assume un valore reale (o puramente immaginario) secondo che è di prima (o di seconda) specie.

Le forme di Hermite di prima specie, come le forme quadratiche a coefficienti reali, si dividono in riducibili ed irriducibili, in definite, semidefinite, indefinite (1). Una forma di Hermite di prima specie non indefinita si dirà poi *parzialmente definita rispetto alle variabili* x_{h_1} , x_{h_2} , ... x_{h_l} (e y_{h_1} , y_{h_2} ... y_{h_l}) quando l'annullarsi della forma per valori complessi coniugati delle variabili porti di necessità l'annullarsi delle x_{h_1} , x_{h_2} , ... x_{h_l} (e delle coniugate). Perchè questo sia è necessario e sufficiente, oltre esser la forma non indefinita, che sopprimendo dal *discriminante* $a = |a_{\mu\nu}|$ della forma le righe (o le colonne) relative alle variabili x_{h_1} , ... x_{h_l}, la caratteristica della matrice residua sia inferiore di altrettante unità a quella del discriminante della forma stessa.

2. Siano ora:

$$(1) \quad A(x, y) = \Sigma_{\mu\nu} a_{\mu\nu} x_\mu y_\nu ; \quad B(x, y) = \Sigma_{\mu\nu} b_{\mu\nu} x_\mu y_\nu \quad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots n)$$

due forme bilineari nelle $2n$ variabili $x_1 \ldots x_n$, $y_1 \ldots y_n$: e si consideri l'equazione in ω :

$$(2) \qquad D(\omega) = |a_{\mu\nu} - \omega b_{\mu\nu}| = 0 \quad (\mu, \nu = 1, 2 \ldots n).$$

I coefficienti di questa equazione sono gli invarianti simultanei delle due forme A e B ; le sue radici ω_1 , $\omega_2 \ldots \omega_n$ sono quindi invarianti *assoluti* delle due forme. Se ω_r è una qualunque radice, i due sistemi di equazioni lineari omogenee nelle incognite $x^{(r)}$, $y^{(r)}$:

$$(3_r) \qquad \sum_1^n{}_\mu (a_{\mu\nu} - \omega_r b_{\mu\nu}) x_\mu^{(r)} = 0 \quad (\nu = 1, 2 \ldots n),$$

$$(4_r) \qquad \sum_1^n{}_\nu (a_{\mu\nu} - \omega_r b_{\mu\nu}) y_\nu^{(r)} = 0 \quad (\mu = 1, 2 \ldots n),$$

ammettono soluzioni $x_1^{(r)} \ldots x_n^{(r)}$ $(y_1^{(r)} \ldots y_n^{(r)})$ *non tutte nulle*; e se ω_r , ω_s sono due radici *diverse* della (2), $x^{(r)}$, $y^{(s)}$ soluzioni delle corrispondenti equazioni (3_r), (4_s), *si ha la relazione fondamentale*:

$$(5) \qquad B(x^{(r)}, y^{(s)}) = \Sigma_{\mu\nu} b_{\mu\nu} x_\mu^{(r)} y_\nu^{(s)} = 0 \quad (\mu, \nu = 1, 2 \ldots n).$$

Le A e B siano ora forme di Hermite di prima specie (od ambedue di seconda, il che è lo stesso); l'equazione (2) ha allora i coefficienti reali

(1) Cfr. Ricci, *Algebra*, pag. 131 e segg.; Loewy, Giornale di Crelle, Bd. 120 S. 53-72.

e quindi le sue radici complesse, se ne ha, sono a coppia coniugate; se ω_1 ed ω_2 sono due tali radici complesse coniugate (e quindi $\omega_1 \neq \omega_2$), è subito visto che nelle (3_1), (4_2) *possono* $x_\nu^{(1)}, y_\nu^{(2)}$ prendersi complesse coniugate, $y_\nu^{(2)} = \bar{x}_\nu^{(1)}$; ed allora la (5), fattovi $r = 1, s = 2$, diventa:

$$\text{(6)} \qquad B(x^{(1)}, \bar{x}^{(1)}) = \Sigma_{\mu\nu}\, b_{\mu\nu}\, x_\mu^{(1)}\, \bar{x}_\nu^{(1)} = 0 .$$

Sia ora la B parzialmente definita rispetto alle x_1, x_2, x_m; la (6) dimostra che deve allora aversi:

$$x_1^{(1)} = x_2^{(1)} = \ldots = x_m^{(1)} = 0 .$$

In tale ipotesi le equazioni (3_1) sono dunque tali che per qualunque loro soluzione deve essere $x_1^{(1)} = x_2^{(1)} = \ldots = x_m^{(1)} = 0$; e quindi, ove la radice ω_1 renda il determinante (2) di caratteristica $r < n$, essa deve rendere di caratteristica $r - m$ la matrice formata dalle ultime $n - m$ righe (o colonne) del determinante stesso.

Consideriamo ora il caso che la B contenga *solo* le variabili $x_1 \ldots x_m, y_1 \ldots y_m$ e quindi sia rispetto ad esse totalmente definita: la condizione superiore non può essere allora soddisfatta (purchè il determinante (2) non sia identicamente nullo, per qualunque ω), poichè la matrice delle ultime $n - m$ righe è indipendente da ω ed ha quindi la caratteristica $n - m$. D'altronde è sempre possibile trasformare la B in una forma di Hermite definita in tutte le variabili che contiene. Ne segue *il teorema fondamentale*:

I. *Se* A *e* B *sono due forme di Hermite di prima specie ed una di esse, ad es. la* B *non è indefinita, l'equazione*:

$$\text{(2)} \qquad |a_{\mu\nu} - \omega b_{\mu\nu}| = 0 \quad (\mu, \nu = 1, 2 \ldots n)$$

ha tutte le radici reali.

Considerando insieme colla forma $A - \omega B$ le forme bilineari ad essa *associate* [1], ed estendendo un procedimento già tenuto dal Clebsch in un caso particolare [2], si dimostra anche:

II. *Una radice multipla di ordine* ϱ *della equazione* (2) *rende il determinante* $D(\omega)$ *di caratteristica* $n - \varrho$.

[1] Cfr. Niccoletti, Atti dell'Accademia di Torino, 15 giugno 1902.
[2] Clebsch, Giornale di Crelle, Bd. 62, pag. 232 segg.

Indichiamo con $D_{i_1 i_2 \ldots i_k}(\omega)$ il minore principale di ordine $n - k$ del determinante (2), che si ottiene sopprimendovi le righe e le colonne $i_1\, i_2 \ldots i_k$; sia inoltre η l'unità negativa o positiva, secondochè B è positiva o negativa (per valori complessi coniugati delle variabili, che non l'annullino); ponendo:

$$(7) \qquad \Delta_{i_1 i_2 \ldots i_k}(\omega) = \eta^k \cdot D_{i_1 \ldots i_k}(\omega)$$

ed indicando con $i_1 \ldots i_n$ una determinata permutazione degli indici $1, 2 \ldots n$, consideriamo la successione di $n + 1$ funzioni:

$$(8) \qquad D(\omega),\ \Delta_{i_1}(\omega),\ \Delta_{i_1 i_2}(\omega), \ldots \Delta_{i_1 \ldots i_n}(\omega) = 1;$$

si ha per essa il teorema:

III. *Se tra le funzioni* (8) *non ve ne sono delle identicamente nulle, nè due qualunque consecutive si annullano per uno stesso valore di* ω, *la* (8) *è una successione di Sturm per la equazione* (2) *e quindi il numero delle radici reali di essa equazione comprese in un intervallo* $(\alpha\beta)$ (*ciascuna contata col suo ordine di moltiplicità*) *è uguale al numero delle variazioni che la* (8) *perde nell'intervallo stesso* [1].

3. Alcune osservazioni sui risultati che precedono.

a) Particolarizzando convenientemente le forme A e B, si hanno dalla (2) delle classi di equazioni, apparentemente diverse, con radici tutte reali, considerate, tra gli altri, da Bochardt, Clebsch, Christoffel ecc. ecc. [2].

b) I teoremi I e II possono evidentemente enunciarsi dicendo che: *I divisori elementari del determinante* $D(\omega)$, *corrispondenti alle radici finite della* (2), *sono reali e lineari* [3]; si ottiene in tal guisa la prima parte di un teorema, ottenuto la prima volta, per via trascendente, dal sig. Gundelfinder [4]. Il teorema del sig. Gundelfinder considera anche i divisori elementari corrispondenti alle radici infinite della (2) e dimostra che essi possono avere solo il primo ed il secondo grado. Delle proprietà elementari della teoria dei determinanti permettono di ottenere (e precisare) questo risultato: si ha così in ciò che precede una dimostrazione puramente algebrica, e di carattere elementare, del teorema del sig. Gundelfinder.

c) Delle due forme di Hermite A e B, una B sia di prima specie, l'altra A di seconda. Ci riduciamo al caso dianzi trattato cambiando ω in $i\omega$. Se dunque la B non è indefinita, la equazione (2) ha in questo caso tutte radici *immaginarie pure*. Essa avrà inoltre i coefficienti reali quando sian

(1) Weber, *Algebra*, vol. I, prima ediz., pag. 276.

(2) Clebsch, Giornale di Crelle, Bd. 57, pag. 327; e 62, pag. 232. Christoffel — ibidem Bd. 63, s. 255.

(3) Muth, *Elementartheiler*, pag. 179.

(4) Hesse, *Vorlesungen aus der analytischen Geometrie*, seconda ediz., 1876, supp. X.

tali i coefficienti di A e di B, quando la B sia dunque reale e simmetrica (e non indefinita), la A reale ed emisimmetrica. In questo caso la (2) può ridursi a contenere solo le potenze pari di ω e posto $\omega^2 = -u$, si ottiene da essa *un'equazione* $H(u) = 0$ *a radici tutte reali e positive.*

d) L'equazione (2) conserverà tutte le radici reali, quando, nelle ipotesi superiori, o se ne moltiplichi il primo membro per un fattore non nullo, ad es. per un determinante di ordine n indipendente da ω e diverso da zero, oppure quando si eseguiscano sulle x e sulle y sostituzioni lineari arbitrarie. Si ottengono così delle equazioni a radici tutte reali di forma molto diversa dalla (2): tra queste ve ne è una classe, dovuta ancora al sig. Gundelfinder (1).

e) Infine delle due forme bilineari A e B, l'una, ad es. la B sia di Hermite, di prima specie, e *definita*; la A sia qualunque. La (2) avrà allora in generale coefficienti e radici complesse, ma se ne può limitare la parte reale e l'immaginaria; più in generale si ha il teorema:

Se la B *è una forma definita di Hermite, ed* $\omega = p + iq$ *è una radice della* (2), *indicando con* ϱ *e* σ *due indeterminate reali affatto arbitrarie, con* $M_{\varrho\sigma}$, $m_{\varrho\sigma}$ *la massima e minima radice dell'equazione* (*a radici tutte reali*):

$$(9) \qquad \left| \varrho \frac{a_{\mu\nu} + \bar{a}_{\nu\mu}}{2} + \sigma \frac{a_{\mu\nu} - \bar{a}_{\nu\mu}}{2i} - \omega\, b_{\mu\nu} \right| = 0,$$

si ha la limitazione:

$$(10) \qquad m_{\varrho\sigma} \leq \varrho p + \sigma q \leq M_{\varrho\sigma} \quad (2).$$

4. I teoremi che precedono possono estendersi in due sensi diversi, sia rimanendo nel caso di una sola equazione, sia passando a sistemi di più equazioni. Ci limiteremo ad accennare i casi più importanti che si presentano nell'una e nell'altra estensione.

Siano tre forme di Hermite in $2n$ variabili $x_1\, x_2 \ldots x_n\, , y_1\, y_2 \ldots y_n$:

$$(11) \qquad A = \Sigma_{\mu\nu}\, a_{\mu\nu}\, x_\mu\, y_\nu\, ; \quad B = \Sigma_{\mu\nu}\, b_{\mu\nu}\, x_\mu\, y_\nu\, ; \quad C = \Sigma_{\mu\nu}\, c_{\mu\nu}\, x_\mu\, y_\nu$$

e si consideri l'equazione in ω:

$$(12) \qquad E(\omega) = |a_{\mu\nu} + 2\omega\, b_{\mu\nu} + \omega^2\, c_{\mu\nu}| = 0.$$

Questa equazione ha i coefficienti reali e ad una sua radice ω_r possono farsi corrispondere due sistemi di equazioni lineari omogenee:

$$(13_r) \qquad \Sigma_\mu\, (a_{\mu\nu} + 2\omega_r\, b_{\mu\nu} + \omega_r^2\, c_{\mu\nu})\, x_\mu^{(r)} = 0\, , \quad (\nu = 1\, , 2\, , \ldots n)$$

$$(14_r) \qquad \Sigma_\nu\, (a_{\mu\nu} + 2\omega_r\, b_{\mu\nu} + \omega_r^2\, c_{\mu\nu})\, y_\nu^{(r)} = 0\, , \quad (\mu = 1\, , 2\, , \ldots n)$$

(1) Dingeldey, Giornale di Crelle, vol. 119.

(2) Bedinxon, *Sur les racines d'une équation fondamentale* (Accademia di Stoccolma, 14 novembre 1900).

con soluzioni non tutte nulle; ed ancora, se ω_r , ω_s sono due radici *diverse* della (12), $x^{(r)}$, $y^{(s)}$ soluzioni dei corrispondenti sistemi (13_r), (14_s), *si hanno le tre relazioni*:

$$(15)\quad \begin{cases} (a) & 2\mathrm{B}(x^{(r)}, y^{(s)}) + (\omega_r + \omega_s)\,\mathrm{C}(x^{(r)}, y^{(s)}) = 0\,, \\ (b) & \mathrm{A}(x^{(r)}, y^{(s)}) - \omega_r\,\omega_s\,\mathrm{C}(x^{(r)}, y^{(s)}) = 0\,, \\ (c) & \left(\frac{1}{\omega_r} + \frac{1}{\omega_s}\right)\mathrm{A}(x^{(r)}, y^{(s)}) + 2\mathrm{B}(x^{(r)}, y^{(s)}) = 0\,. \end{cases}$$

Si deducono dalle (15) conseguenze notevoli:

a) Una delle forme estreme ad es. la C sia definita; allora: *la parte reale p di una radice complessa della* (12) *è sempre compresa tra la massima e minima radice dell'equazione in* λ (*a radici tutte reali*)

$$|b_{\mu\nu} + \lambda c_{\mu\nu}| = 0\,;$$

il quadrato r^2 *del modulo tra la massima e minima radice dell'equazione in* σ (*pure a radici reali*):

$$|a_{\mu\nu} - \sigma c_{\mu\nu}| = 0\,.$$

b) Sia definita la B: si hanno dalle (15) *a*) e *c*) conseguenze analoghe per le quantità $\frac{1}{p}$; $\frac{p}{r^2}$.

c) Due consecutive tra le (1), ad es. la B e la C sian *parzialmente* definite rispetto a gruppi complementari di variabili; cioè se la B è definita rispetto alle $x_{h_1}, x_{h_2}, \ldots x_{h_l}$, la C rispetto alle $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots x_{k_m}$, tra le $x_{h_1}, \ldots x_{h_l}$; $x_{k_1}, \ldots x_{k_m}$ si trovino tutte le $x_1, x_2, \ldots x_n$; in questa ipotesi si ha: *Le radici complesse della* (2), *non immaginarie pure, hanno la parte reale del medesimo segno.*

Si indichi inoltre con ε l'unità positiva o negativa, secondochè il segno di B è il positivo o negativo: posto allora (con notazioni analoghe al n° 2):

$$(16)\qquad E_{i_1 i_2 \ldots i_k}(\omega) = \varepsilon^k \,.\, \mathrm{E}_{i_1 \ldots i_k}(\omega)\,,$$

si consideri la successione:

$$(17)\qquad \mathrm{E}(\omega)\,,\ E_{i_1}(\omega)\,,\ E_{i_1 i_2}(\omega)\,,\ \ldots\ ;\ E_{i_1 \ldots i^n}(\omega) = 1\,.$$

Secondochè B e C hanno ugual segno (o segno contrario), la successione (17) ha proprietà analoghe a quelle di una successione di Sturm per le radici reali e positive (o reali e negative) della equazione (12).

d) Siano invece le due forme estreme A e C parzialmente definite e di segno contrario; e siano definite rispetto a due gruppi complementari di variabili, oppure con una *stessa* sostituzione lineare sulle x (e la coniu-

gata sulle y) sian riducibili a contenere le stesse k variabili $x'_1, x'_2, .. x'_k$ ($y'_1, y'_2, ... y'_k$); in questo caso: *L'equazione* (12) *ha tutte le radici reali.*

Se insieme anche la forma intermedia B è (parzialmente) definita (come a *c*)) è possibile inoltre costruire dai minori principali del determinante (12) due successioni di Sturm di $n+1$ funzioni, l'una per le radici positive, l'altra per le radici negative della equazione stessa: sicchè in particolare quando tutte tre le forme sian definite e ad es. le A, B parzialmente, la C totalmente, e le A e C abbian segno contrario, si ha: *L'equazione* (12) *ha le* $2n$ *radici reali ed* n *positive,* n *negative.*

e) Considerazioni leggermente diverse dalle antecedenti conducono ancora al risultato seguente. La forma C si supponga totalmente definita; e le A, B, C sian tali che si abbia

$$AC - B^2 \leq 0 \tag{18}$$

per tutti i possibili valori delle x (e i coniugati delle y); in questo caso ancora: *L'equazione* (12) *ha tutte le radici reali.*

Se invece, per tutti i valori delle x, vale la disuguaglianza:

$$AC - B^2 > 0, \tag{19}$$

la equazione (12) non ha radici reali; le parti reali ed immaginarie delle sue radici complesse possono limitarsi.

5. Nella (12) le due forme estreme A e C siano ancora di prima specie, la B di seconda: ci riduciamo al caso precedente cambiando ω in $i\omega$. Ne segue in particolare: *Se le forme* A *e* C *sono* (*parzialmente*) *definite di ugual segno* (*nelle condizioni* (*d*)) *la* (12) *ha tutte le radici immaginarie pure.* Essa avrà inoltre i coefficienti reali, quando le A, B, C siano anche esse a coefficienti reali, e quindi le A e C simmetriche, la B emisimmetrica: e posto $\omega^2 = -u$ si dedurrà dalla (12) un'equazione $G(u) = 0$, *con radici tutte reali e positive.* Inoltre dai minori principali del determinante (12) è possibile costruire una successione di $n+1$ funzioni razionali intere in u, che abbia per la $G(u) = 0$ proprietà analoghe a quelle di una successione di Fourier.

6. Volendo trattare di un sistema di due equazioni con due incognite, consideriamo due reti proiettive di forme bilineari, in $2n$ e $2m$ variabili rispettivamente:

$$(20)\quad \begin{cases} \xi A + \eta B + \zeta C = \Sigma_{\mu\nu} (\xi a_{\mu\nu} + \eta b_{\mu\nu} + \zeta c_{\mu\nu}) x_\mu y_\nu, & (\mu, \nu = 1, 2 \ldots n), \\ \xi D + \eta E + \zeta F = \Sigma_{rs} (\xi d_{rs} + \eta e_{rs} + \zeta f_{rs}) u_r v_s; & (r, s = 1, 2 \ldots m), \end{cases}$$

due forme corrispondenti delle due reti saranno ambedue specializzate, quando sia insieme:

$$(21)\qquad |\xi a_{\mu\nu} + \eta b_{\mu\nu} + \zeta c_{\mu\nu}| = 0, \quad |\xi d_{rs} + \eta e_{rs} + \zeta f_{rs}| = 0.$$

Se $\omega_\alpha = (\xi_\alpha , \eta_\alpha , \zeta_\alpha)$ è una soluzione (radice) delle (21), i quattro sistemi di equazioni lineari omogenee

$$(22)\quad \begin{cases} (a)\ \sum_1^n{}_\mu (\xi_\alpha a_{\mu\nu} + \eta_\alpha b_{\mu\nu} + \zeta_\alpha c_{\mu\nu})\, x_\mu^{(\alpha)} = 0\,, \quad (\nu = 1\,, 2 \ldots n) \\ (b)\ \sum_1^n{}_\nu (\xi_\alpha a_{\mu\nu} + \eta_\alpha b_{\mu\nu} + \zeta_\alpha c_{\mu\nu})\, y_\nu^{(\alpha)} = 0\,, \quad (\mu = 1\,, 2 \ldots n) \\ (c)\ \sum_1^m{}_r (\zeta_\alpha d_{rs} + \eta_\alpha e_{rs} + \zeta_\alpha f_{rs})\, u_r^{(\alpha)} = 0\,, \quad (s = 1\,, 2 \ldots m) \\ (d)\ \sum_1^m{}_s (\xi_\alpha d_{rs} + \eta_\alpha e_{rs} + \zeta_\alpha f_{rs})\, v_s^{(\alpha)} = 0\,, \quad (r = 1\,, 2 \ldots m) \end{cases}$$

hanno soluzioni *non tutte nulle*, e per due radici $\omega_\alpha , \omega_\beta$ *distinte* si ha la relazione fondamentale:

$$(23)\qquad \mathrm{B}(x^{(\alpha)}\, y^{(\beta)})\, \mathrm{F}(u^{(\alpha)}\, v^{(\beta)}) - \mathrm{C}(x^{(\alpha)}\, y^{(\beta)})\, \mathrm{E}(u^{(\alpha}\, v^{(\beta)}) = 0\,.$$

Le forme (20) siano ora di Hermite di prima specie (o tutte di seconda). Le (21) hanno i coefficienti reali e se $\omega_\alpha , \omega_\beta$ sono due radici complesse coniugate, si può supporre nella (23) che $y_i^{(\beta)} , v_r^{(\beta)}$ siano complesse coniugate di $x_i^{(\alpha)} , u_r^{(\alpha)}$ rispettivamente. Si supponga ora, per fare il caso più semplice, che le quattro forme B, C, E, F siano definite, e tre abbiano uno stesso segno, una il segno contrario. La (23) non può allora aver luogo pei valori superiori delle $x^{(\alpha)} , u^{(\alpha)} , y^{(\beta)} , v^{(\beta)}$. Ne seguono i due teoremi:

a) Nelle ipotesi fatte, il sistema delle due equazioni dei gradi n ed m nelle incognite ω e θ:

$$(24)\qquad |a_{\mu\nu} + \omega b_{\mu\nu} + \theta c_{\mu\nu}| = 0\,; \quad |d_{rs} + \omega e_{rs} + \theta f_{rs}| = 0\,,$$

ha tutte le radici reali.

b) Se (ω , θ) è una soluzione del sistema:

$$(25)\qquad |a_{\mu\nu}\omega + b_{\mu\nu} + c_{\mu\nu}\theta| = 0\,; \quad |d_{rs}\omega + e_{rs} + f_{rs}\theta| = 0\,,$$

la ω è reale, ed, ove non sia nulla, anche θ è reale.

7. Infine le B, C, E, F siano forme di Hermite di prima specie, le A e D di seconda: ci riduciamo al caso antecedente, cambiando ξ in $i\xi$ (od η e ζ in $i\eta , i\zeta$): nelle stesse ipotesi del n. 6 le (24) hanno allora ad es. radici immaginarie pure. Più particolarmente quando le sei forme abbiano i coefficienti reali e quindi le B, C, E, F sian simmetriche, le A e B emisimmetriche, le (21) hanno i coefficienti reali.

a) Poniamovi allora $\xi = 1$, $\eta = \omega$, $\zeta = \omega\theta$; $\omega^2 = -u$; le (21) si cambiano in due equazioni:

$$(26)\qquad \mathrm{G}(u , \theta) = 0\,, \quad \mathrm{H}(u , \theta) = 0$$

con radici (u , θ) reali e u reale e positivo.

b) Poniamovi invece $\xi = \omega$, $\eta = 1$, $\zeta = \theta$, $\omega^2 = -u$; otterremo due equazioni:

$$M(u, \theta) = 0, \quad N(u, \theta) = 0, \tag{27}$$

tali che in una loro soluzione (u, θ), u è reale e non negativo, e se u è diverso da zero, anche θ è reale.

Fisica terrestre. — *Sul problema generale della sismografia.* Nota V del dott. M. Contarini, presentata dal Socio V. Cerruti.

In tutte le Note da me pubblicate con questo titolo nei Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, come pure nella prima Nota sulla determinazione dei moti sismici ivi citata, esiste un errore grave per sè [1], ma fortunatamente non molto importante per le applicazioni pratiche che mi sono proposto: anzi la rettifica che pubblicherò fra breve lascerà sostanzialmente intatto il metodo e l'ordine seguiti nei lavori precedenti. — Intanto credo opportuno limitarmi a riprodurre corrette le equazioni differenziali nelle quali si rese sensibile l'errore commesso, per procedere poi alla integrazione, cioè per determinare in funzione del tempo le sei incognite sismiche.

Alla prima delle (17) bisogna sostituire

$$\eta'' m_z + \gamma'' - \alpha g m_z - \xi'' \varrho m_z + U = 0. \tag{17'}$$

E alla (19_1)

$$\eta'' r \boldsymbol{M} + \alpha'' p \boldsymbol{M}_x + \gamma'' r \boldsymbol{M}_z - \alpha g r \boldsymbol{M} + r \boldsymbol{M} (\pi\zeta'' - \varrho\xi'') + \boldsymbol{\Omega} = 0. \tag{$19_1'$}$$

19. — Finora, cercando le equazioni che reggono il moto dei varî strumenti sismici, questi si supposero indipendenti gli uni dagli altri; cosicchè le variabili ξ, η, ζ, α, β, γ che compariscono, o tutte o in parte, nei diversi sistemi di equazioni differenziali trovate, hanno un significato e un valore diverso a

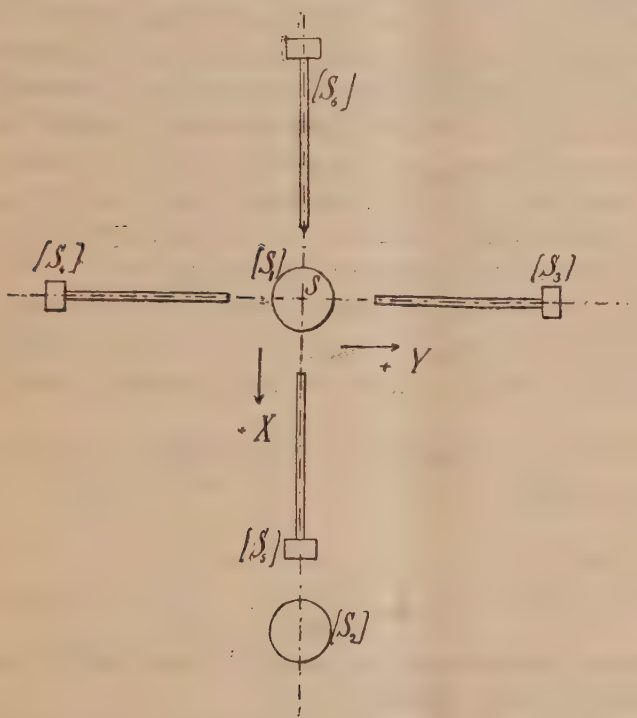
[1] L'errore consiste in ciò: per calcolare gli spostamenti virtuali d'un punto P_{ri}, sono partito dall'espressione

$$\delta\xi_{ri} = \delta\zeta_{ro} + \delta\chi_r (\zeta_{ri} - \zeta_{ro}) - \delta\varrho_r (\eta_{ri} - \eta_{ro}) \quad \text{etc.} \quad \text{(V. I, pag. 383)}$$

che vale per qualunque movimento rigido; ma ho implicitamente ammesso che i coefficienti dei binomi $(\zeta_{ri} - \zeta_{ro}), \ldots$ fossero appunto le *variazioni arbitrarie delle rotazioni* $\chi, \ldots$, mentre invece sono *simboli* che rappresentano funzioni lineari di quelle variazioni; in tal modo c'era il pericolo di omettere nelle equazioni finali dei termini non trascurabili. Quanto al termine $-\alpha g m_z$ che era stato omesso nella (17) ed ora comparisce nella (17'), si può ritrovare facilmente osservando che la reazione elastica dovuta alla rettificazione iniziale della sbarra non fa equilibrio al *peso* dello strumento, ma soltanto alla componente del peso secondo l'asse delle Z (verticale apparente). [V. III, pag. 477].

seconda dei sistemi, cioè a seconda degli strumenti ai quali le equazioni stesse si riferiscono.

Per tener conto di questa variabilità chiamerò S_r $(x_r\ y_r\ z_r)$ il sistema di assi solidale con la massa oscillante dello strumento $[S_r]$, S_r $(X_r\ Y_r\ Z_r)$ il sistema solidale col terreno, al quale il sistema precedente si sovrappone quando lo strumento è in quiete relativa; e infine Ω_r $(\xi_r\ \eta_r\ \zeta_r)$ il sistema immobile, col quale il sistema precedente coincide in caso di quiete sismica.



È naturale anche di sostituire ai simboli generici fin qui usati $\xi, \ldots, \gamma$ i simboli speciali $\xi_r, \ldots, \gamma_r$, come quelli che rappresentano precisamente le componenti del moto del sistema S_r $(X_r\ Y_r\ Z_r)$ rispetto al sistema Ω_r $(\xi_r\ \eta_r\ \zeta_r)$; e appunto una tale sostituzione suppongo effettuata nelle equazioni differenziali trovate.

Enuncio ora un ultimo postulato, la cui maggiore o minore verosimiglianza dipende dalle condizioni pratiche dell'impianto sismico:

« Tutti i punti di attacco dei varî strumenti che si devono considerare come simultaneamente soggetti a un medesimo moto sismico, formano un sistema rigido con l'elemento di crosta solida terrestre del quale si cerca il movimento » (1).

(1) Con ciò si vengono a trascurare le deformazioni elastiche, termiche ecc. del pilastro o dell'edificio al quale i varî strumenti sono sospesi.

Scelto allora un nuovo sistema d'assi S(XYZ), solidale con questo elemento (sistema fondamentale mobile), saranno *costanti* e si potranno ritenere come note le coordinate $(X_r\ Y_r\ Z_r)$ dell'origine S_r rispetto a questo sistema; e se $\Omega\ (\xi\ \eta\ \zeta)$ è un sistema d'assi indipendente dal moto sismico (sistema fondamentale fisso), solidale coi varî sistemi $\Omega_r\ (\zeta_r\ \eta_r\ \zeta_r)$ e coincidente col sistema fondamentale mobile quando il terreno è in quiete, è evidente che (X_r, Y_r, Z_r) sono anche le coordinate dei punti Ω_r rispetto a $\Omega\ (\xi, \eta, \zeta)$.

Ciò premesso, è logico di scegliere come uniche incognite sismiche le sei quantità $\xi, \eta, \zeta, \alpha, \beta, \gamma$, che definiscono il moto del sistema fondamentale mobile rispetto al fisso, e quindi introdurre queste nuove variabili in luogo delle $\xi_r, \ldots, \gamma_r$ che compariscono nelle equazioni differenziali.

A questo scopo si ricordi che nella trattazione generale tutti gli assi delle ζ_r si supposero diretti secondo la gravità; facendo la stessa convenzione anche per l'asse delle ζ, potremo ritenere che tutti gli assi ζ_r siano *paralleli* all'asse ζ; e basterà fissare l'angolo ϑ_r che la direzione positiva dell'asse ξ_r o X_r fa rispettivamente con la direzione positiva dell'asse ξ o X. — Condotti infatti per il punto Ω_r due assi ausiliarî paralleli a quelli delle ξ e delle η, chiamate $\xi_r^{(1)}, \eta_r^{(1)}, \alpha_r^{(1)}, \beta_r^{(1)}$ le traslazioni e le rotazioni elementari del sistema $S_r\ (X_rY_rZ_r)$ secondo e intorno gli assi ausiliarî, e posto per brevità

$$s_r = \operatorname{sen} \vartheta_r \quad , \quad c_r = \cos \vartheta_r \, ,$$

abbiamo le relazioni:

$$(27) \qquad \begin{cases} \xi_r = \xi_r^{(1)}\, c_r - \eta_r^{(1)}\, s_r \ , \ \eta_r = \xi_r^{(1)}\, s_r + \eta_r^{(1)}\, c_r \ , \ \zeta_r = \zeta_r^{(1)} \\ \alpha_r = \alpha_r^{(1)}\, c_r - \beta_r^{(1)}\, s_r \ , \ \beta_r = \alpha_r^{(1)}\, s_r + \beta_r^{(1)}\, c_r \ , \ \gamma_r = \gamma_r^{(1)} \, , \end{cases}$$

le quali valgono supponendo che gli angoli ϑ_r siano positivi quando vanno dalla direzione $+\xi$ alla direzione $+\eta$.

D'altra parte per note proprietà cinematiche dei sistemi rigidi abbiamo

$$\xi_r^{(1)} = \xi + \beta Z_r - \gamma Y_r \ , \ \text{etc.} \, ;$$
$$\alpha_r^{(1)} = \alpha \ , \ \beta_r^{(1)} = \beta \ , \ \gamma_r^{(1)} = \gamma \, ;$$

e quindi le eguaglianze precedenti diventano

$$(27') \qquad \begin{cases} \xi_r = \xi c_r - \eta s_r + \alpha Z_r\, s_r + \beta Z_r\, c_r - \gamma(X_r\, s_r + Y_r\, c_r) \, , \\ \eta_r = \xi s_r + \eta c_r - \alpha Z_r\, c_r + \beta Z_r\, s_r + \gamma(X_r\, c_r - Y_r\, s_r) \, , \\ \xi_r = \xi + \alpha Y_r - \beta X_r \, . \end{cases}$$

$$(27'') \qquad \alpha_r = \alpha c_r - \beta S_r \ , \ \beta_r = \alpha S_r + \beta c_r \ , \ \gamma_r = \gamma \, .$$

Ora basterebbe sostituire nelle equazioni differenziali trovate alle incognite $\xi_r, \ldots, \gamma_r$ le loro espressioni (27'), (27''); ma in pratica è superflua

la generalità di queste espressioni, e conviene semplificarle prendendo gli assi delle X_r, Y_r paralleli a quelli delle X, Y.

Così appunto facendo, e dividendo rispettivamente per m_x, m_y, m_z, M le equazioni che contengono tali fattori, compariscono quali coefficienti delle accelerazioni angolari binomi della forma $\left(X + \frac{1}{m_y}\right)$, $\left(X + \frac{1}{m_z}\right)$, ... ecc., i quali tutti hanno le dimensioni d'una lunghezza. Ora io suppongo che per i pendoli verticali e per i sismografi a molla orizzontale (V. III, n. 14, pag. 477) i momenti d'inerzia rispetto ai due assi coordinati non passanti per il baricentro siano eguali (1). Allora per i pendoli verticali, per i sismografi a molla orizzontale paralleli all'asse delle X e per quelli paralleli all'asse delle Y, si possono fare rispettivamente le posizioni:

$$Z + \frac{1}{m_x} = Z + \frac{1}{m_y} = l_z$$
$$X + \frac{1}{m_y} = X + \frac{1}{m_z} = l_x$$
$$Y + \frac{1}{m_z} = Y + \frac{1}{m_x} = l_y ;$$

anche per i pendoli orizzontali normali al piano $X = 0$, o al piano $Y = 0$, si possono fare rispettivamente le seguenti coppie di posizioni:

$$\begin{cases} Z - \frac{p}{r}\frac{M_x}{M} = l_z , \\ X + \frac{M_x}{M} = l_x ; \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z - \frac{q}{r}\frac{M_y}{M} = l_z , \\ Y + \frac{M_y}{M} = l_y \text{ (2)} ; \end{cases}$$

e quindi le equazioni differenziali (16) (17) (19_1) prendono infine la forma seguente, nella quale le funzioni N sono del tipo

$$\begin{cases} N(\varepsilon) \equiv \varepsilon'' - 2H\varepsilon' + (H^2 + K^2)\,\varepsilon \\ (\varepsilon = \lambda , \mu , \nu , \omega) , \end{cases}$$

(1) Sarebbe troppo restrittiva una simile ipotesi per i pendoli orizzontali, perchè resterebbero esclusi p. e. quelli del v. Rebeur Paschwitz.

(2) Si può osservare che le lunghezze l_x, l_y, l_z rappresentano con una certa approssimazione le coordinate di baricentri degli strumenti, ai quali le lunghezze stesse si riferiscono, rispetto al sistema fondamentale mobile.

le variabili $\xi, \eta, \zeta, \alpha, \beta, \gamma$ hanno sempre lo stesso valore e si assumono come *incognite sismiche*, mentre invece le variabili $\lambda, \mu, \nu, \omega$, come pure le costanti che compariscono esplicitamente o sono contenute nelle funzioni N (esclusa $g =$ accelerazione della gravità) hanno valori diversi a seconda delle equazioni in cui sono contenute e il significato loro attribuito nella trattazione generale:

Pendolo verticale diretto o rovesciato (V. III, n. 14, pag. 477) coll'origine nel punto (X, Y, Z):

$$\xi'' + \beta'' l_z + \beta g - \gamma'' Y - [\zeta'' \chi] + \frac{1}{m_y} N(\mu) = 0$$

$$-\eta'' + \alpha'' l_z + \alpha g - \gamma'' X - [\zeta'' \pi] + \frac{1}{m_x} N(\lambda) = 0$$

$$\gamma'' + m_z [\xi'' \pi + \eta'' \chi] + N(\nu) = 0 \ (^1).$$

Sismografo a molla orizzontale (V. III, n. 14, pag. 477) parallela all'asse delle X:

$$\eta'' + \gamma'' l_x - \alpha'' Z - \alpha g - [\xi'' \varrho] + \frac{1}{m_z} N(\nu) = 0$$

$$-\zeta'' + \beta'' l_x - \alpha'' Y - [\xi'' \chi] + \frac{1}{m_y} N(\mu) = 0.$$

Sismografo a molla orizzontale parallela all'asse delle Y:

$$-\xi'' + \gamma'' l_y - \beta'' Z - \beta g - [\eta'' \varrho] + \frac{1}{m_z} N(\nu) = 0$$

$$\zeta'' + \alpha'' l_y - \beta'' X - [\eta'' \pi] + \frac{1}{m_x} N(\lambda) = 0.$$

Pendolo orizzontale diretto secondo l'asse delle X:

$$\eta'' - \alpha'' l_z + \gamma'' l_x - \alpha g + [\pi \zeta'' - \varrho \xi''] + \frac{1}{r}\left(\frac{p^2}{m_x} + \frac{r^2}{m_z}\right) N(\omega) = 0.$$

Pendolo orizzontale diretto secondo l'asse delle Y:

$$-\xi'' - \beta'' l_z + \gamma'' l_y - \beta g + [\chi \zeta'' - \varrho \xi''] + \frac{1}{r}\left(\frac{q^2}{m_y} + \frac{r^2}{m_z}\right) N(\omega) = 0.$$

In particolare, supponendo infinitesime anche le accelerazioni traslatorie, cioè trascurando tutti i termini racchiusi fra parentesi quadra, per gli strumenti (S_r) sospesi nei punti ($X_r\ Y_r\ Z_r$) e disposti come mostra in proiezione orizzontale l'annessa figura, rappresentando con λ_r, μ_r, ν_r le funzioni note del tempo, le equazioni si semplificano nel modo seguente:

(1) Questa equazione non ha praticamente alcun valore, perchè la rotazione ν degli ordinarî pendoli verticali resta sconosciuta.

Pendolo verticale: $[S_1]$ $(X_1 = Y_1 = 0)$

$$(28) \qquad \begin{cases} \xi'' + \beta'' l_{z1} + \beta g + \mu_1 = 0 \\ -\eta'' + \alpha'' l_{z1} + \alpha g + \lambda_1 = 0 \end{cases}$$

Id.: $[S_2]$ $(X_2 = X\,,\ Y_2 = 0)$

$$(29) \qquad \begin{cases} \xi'' + \beta'' l_{z2} + \beta g + \mu_2 = 0 \\ -\eta'' + \alpha'' l_{z2} + \alpha g + \lambda_2 = \gamma'' X \end{cases}$$

Sismografo a molla orizzontale diretto secondo l'asse delle Y:

$$[S_3] \quad (X_3 = Z_3 = 0\,,\ l_{y3} = l')$$

$$(30) \qquad -\xi'' + \gamma'' l' - \beta g + \nu_3 = 0$$

$$(30_1) \qquad \zeta'' + \alpha'' l' + \lambda_3 = 0$$

Id. Id. eguale e simmetrico al precedente: $[S_4]$ $(Y_4 = -Y_3\,,\ l_{y4} = -l')$

$$(31) \qquad -\xi'' - \gamma'' l' - \beta g + \nu_4 = 0$$

$$(31_1) \qquad \zeta'' - \alpha'' l' + \lambda_4 = 0$$

Id. eguale al precedente e diretto secondo l'asse delle X:

$$[S_5] \quad (Y_5 = Z_5 = 0\,,\ X_5 = X_3\,,\ l_{x5} = l_{y3} = l')$$

$$(32) \qquad \eta'' + \gamma'' l' - \alpha g + \nu_5 = 0$$

$$(32_1) \qquad -\zeta'' + \beta'' l' + \mu_5 = 0$$

Pendolo orizzontale: $[S_6]$ $(Y_6 = 0)$

$$(33) \qquad \eta'' - \alpha'' l_z - \alpha g + \gamma'' l_x + \omega_6 = 0$$

Se gli strumenti $[S_3]$ $[S_4]$ $[S_5]$ dessero solo la componente verticale, mancherebbero le equazioni (30), (31), (32).

20. — Ridotte così le equazioni differenziali, il problema dell'integrazione si riduce, come già osservai in un altro lavoro, a fissare una combinazione di strumenti tale che le corrispondenti equazioni siano *almeno in numero di sei tutte indipendenti e contenenti tutte le incognite.* Fra le molte combinazioni possibili cito le seguenti, che danno luogo a calcoli relativamente semplici:

a) $[S_1]$, $[S_2]$, $[S_3]$ a comp. verticale, $[S_4]$ id.: dalle equazioni (28) (29) 30_1) (31_1) opportunamente accoppiate si deduce:

$$\beta'' = \frac{\mu_2 - \mu_1}{l_{z1} - l_{z2}}\,,\quad \xi'' = \frac{\mu_1 l_{z2} - \mu_2 l_{z1}}{l_{z1} - l_{z2}} - \beta g\,,$$

$$\zeta'' = -\frac{\lambda_3 + \lambda_4}{2}\,,\quad \alpha'' = \frac{\lambda_4 - \lambda_3}{2l'}\,,\quad \eta'' = \alpha'' l_{z1} + \alpha g + \lambda_1\,,$$

$$\gamma'' = \frac{2l'(\lambda_2 - \lambda_1) + (l_{z2} - l_{z1})(\lambda_4 - \lambda_3)}{2l' X}\,.$$

Come si vede, la determinazione di β e di ξ non si può fare se non è $l_{r1} \gtrless l_{r2}$, cioè se i baricentri dei due pendoli verticali non sono ad altezze diverse.

b) $[S_1]$, $[S_3]$, $[S_4]$: dalle corrispondenti equazioni (28) (30) (31) (30_1) (31_1) si ricava

$$\beta'' = -\frac{2\mu_1 + \nu_3 + \nu_4}{2l_{z1}} \ , \ \gamma'' = \frac{\nu_4 - \nu_3}{2l'} \ ,$$

$$\alpha'' = \frac{\lambda_4 - \lambda_3}{2l'} \ , \ \zeta'' = -\frac{\lambda_3 + \lambda_4}{2} \ ,$$

$$\xi'' = -(\beta'' l_{z1} + \beta g + \mu_1) \ , \ \eta'' = \alpha'' l_{z1} + \alpha g + \lambda_1 \ .$$

b') $[S_1]$, $[S_3]$, $[S_5]$: dalle equazioni (28), (30), (30_1), (32), (32_1) si ha:

$$\alpha'' = \frac{\mu_1 - \lambda_1 + \nu_3 - \nu_5}{2l_{z1}} - \frac{\lambda_3 + \mu_5}{2l'} \ , \ \beta'' = \frac{\lambda_1 + \nu_5 - \mu_1 - \nu_3}{2l_{z1}} - \frac{\lambda_3 + \mu_5}{2l'}$$

$$\zeta'' = \frac{l_{z1}(\mu_5 - \lambda_3) + l'(\lambda_1 + \nu_5 - \mu_1 - \nu_3)}{2l_{z1}} \ , \ \gamma'' = \frac{l_{z1}(\lambda_3 + \mu_5) - l'(\lambda_1 + \mu_1 + \nu_3 + \nu_5)}{2l'^2}$$

$$\xi'' = -(\beta'' l_{z1} + \beta g + \mu_1) \ , \ \eta'' = \alpha'' l_{z1} + \alpha g + \lambda_1 \ .$$

c) $[S_3]$, $[S_4]$, $[S_5]$: dalle equazioni (30), (30_1), (31), (31_1), (32), (32_1) si ricava successivamente:

$$\gamma'' = \frac{\nu_4 - \nu_3}{2l'} \ , \ \zeta'' = -\frac{\lambda_3 + \lambda_4}{2} \ , \ \alpha'' = \frac{\lambda_4 - \lambda_3}{2l'} \ , \ \beta'' = -\frac{\lambda_3 + \lambda_4 + 2\mu_5}{2l'} \ ,$$

$$\xi'' = \frac{\nu_3 + \nu_4}{2} - \beta g \ , \ \eta'' = \frac{\nu_3 - \nu_4 - 2\nu_5}{2} + \alpha g \ .$$

d) Se in luogo del sismografo a molla orizzontale a due componenti si usa un sismografo a componente verticale $[S_5]$ e un pendolo orizzontale $[S_6]$, alla equazione (32) si sostituisce la (33), la quale dà ancora η'' dopo che le equazioni rimanenti hanno dato le altre incognite.

e) Un pendolo verticale a lungo filo di sospensione (II, n. 8, pag. 436) e un sismografo a molla orizzontale a due componenti, oppure, in luogo di quest'ultimo, un pendolo orizzontale e un sismografo a componente verticale. Il movimento del primo è retto dalle equazioni (10 e (10') della pag. cit., le quali, divise per M_2 e trasformate col supporre che il pendolo sia sospeso al punto $(0, 0, Z)$, diventano:

$$\begin{cases} \xi'' + \beta''(c_1 + l_2 + Z) + \beta g + \varphi_1 = 0 \\ -\eta'' + \alpha''(c_1 + l_2 + Z) + \alpha g + \psi_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \xi'' + \beta''(c_1 + \frac{M_2^{(y)}}{M_2 l_2} + Z) + \beta g + \varphi_2 = 0 \\ -\eta'' + \alpha''(c_1 + \frac{M_2^{(x)}}{M_2 l_2} + Z) + \alpha g + \psi_2 = 0 \end{cases}$$

Sottraendo la prima dalla terza, si ottiene

$$\beta''\left(\frac{M_2^{(y)}}{M_2 l_2} - l_2\right) = \varphi_1 - \varphi_2 \ ;$$

e siccome il coefficiente di β'' è sempre diverso da zero, così si può avere il valore di β: in modo analogo si avrebbe α, e quindi ξ ed η.

Si noti però che per avere sufficiente esattezza, conviene rendere quanto più è possibile

$$M_2^{(y)} > M_2 l_2^2, \text{ ecc.},$$

cioè dare alla massa oscillante grandi momenti principali d'inerzia e sospenderla per un punto vicino al suo baricentro.

In seguito le equazioni relative all'altro o agli altri strumenti danno ζ e γ.

f) Un sismografo per le rotazioni (III, n. 13, pag. 476) il cui moto, qualunque sia il punto di sospensione, è retto dalle (16_1) e un gruppo d'altri strumenti le cui equazioni dinamiche contengano anche le traslazioni: p. e: $[S_1]$ ed $[S_5]$ a comp. vert., oppure $[S_5]$ a comp. vertic. e due pendoli orizzontali disposti in piani perpendicolari, oppure un pendolo orizzontale e uno a molla orizzontale a due componenti.

Per compiere la presente trattazione bisognerebbe ora discutere i risultati ottenuti per dedurne le migliori condizioni sperimentali: il che sarà forse oggetto di un altro lavoro.

Fisica. — *Sulla rapidità con cui si manifesta la birifrangenza magnetica.* Nota di Quirino Majorana, presentata dal Socio Blaserna.

Taluni fenomeni di cui si occupa l'elettro-ottica sono già stati studiati anche dal riguardo della *prontezza* con cui si manifestano, e successivamente scompariscono. Così le esperienze di Bichat e Blondlot [1]) ci dicono che la rotazione magnetica del piano di polarizzazione della luce, segue esattamente e senza ritardo apprezzabile, le variazioni del campo magnetico, in cui è immersa la sostanza attiva. Non so di esperienze tendenti a verificare se la rotazione del piano di polarizzazione, operata per la riflessione di uno specchio di acciajo magnetizzato, sia egualmente pronta come quella di Faraday, e sono invece conosciute le esperienze piuttosto recenti di Abraham e Lemoine [2]) le quali fanno vedere come l'altro fenomeno scoperto dal Kerr, quello cioè

(1) Journ. de phys. 1882, pag. 364.
(2) Journ. de phys. 1900, pag. 263.

della birifrangenza elettrica, sia, nel caso dei liquidi, assolutamente pronto. Benchè manchi la conferma di altri sperimentatori, ricordo che lo stesso Kerr aveva constatato come la birifrangenza elettrica, nel caso dei solidi, contrariamente a quanto avviene pei liquidi, sia un fenomeno tutt'altro che rapido.

Ora, dopo i risultati da me ottenuti ricercando e studiando la birifrangenza magnetica, e descritti in Note precedenti, mi volli render conto, analogamente a quanto fu fatto da altri pel fenomeno Kerr elettrostatico, della prontezza di questo nuovo fenomeno. Se l'analogia da me constatata tra i due casi in cui forze elettriche e forze magnetiche trasformano la struttura amorfa di un liquido, in struttura *pseudo-cristallina,* fosse assolutamente completa, anche la birifrangenza magnetica (si tratta di liquidi) dovrebbe essere un fenomeno pronto.

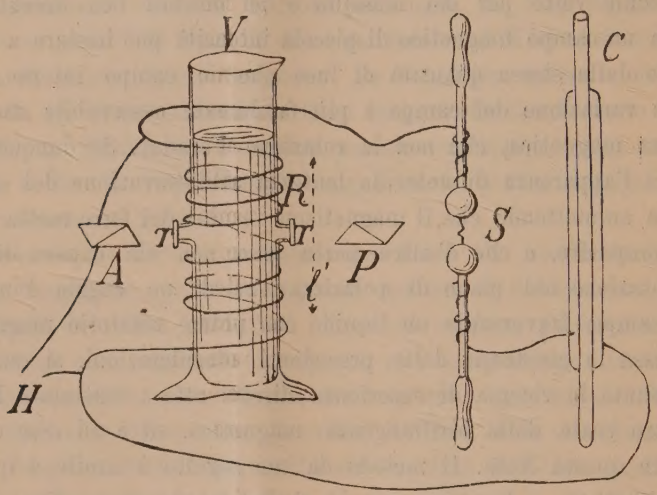
Veramente un esame grossolano del modo di manifestarsi della birifrangenza magnetica, potrebbe a priori lasciare il dubbio che questa prontezza manchi del tutto, ed infatti ciò avevo creduto, prima che avessi istituito ricerche, onde studiare di proposito una tal questione; in altri termini, il fenomeno sarebbe stato simile, sotto questo riguardo, alla birifrangenza elettrica dei solidi come viene descritta dal Kerr nella sua Memoria. Questa credenza fu generata dalle seguenti considerazioni. Richiamo anzitutto l'attenzione del lettore sulla disposizione da me adottata e già descritta, per lo studio del fenomeno; la potente elettrocalamita da me usata, a causa dei notevoli fenomeni di autoinduzione che in essa si manifestano, impiega un tempo apprezzabile per raggiungere la massima magnetizzazione, dall'istante in cui viene lanciata la corrente; un tempo dello stesso ordine di grandezza e forse più lungo, occorre per ottenere la completa smagnetizzazione. Esperienze preliminari possono render conto della lunghezza di questi tempi nella maniera seguente. Le espansioni polari sono fornite di fori sottili parallelamente al campo, i quali permettono osservazioni e misure di potere rotatorio magnetico; eseguendo queste osservazioni, si adoperi un liquido molto attivo come p. es. il benzolo. Così operando, ed avendo posto i due nicol all'estinzione, la luce apparisce e scomparisce, chiudendo ed aprendo il circuito dell'elettromagnete, con una certa lentezza, la quale, come è noto, è la fedele immagine del modo con cui il campo magnetico varia. L'impressione che si ha osservando il fenomeno, è che questa lentezza non sia superiore in ogni caso ad una frazione sensibile di minuto secondo. I fenomeni di birifrangenza osservati quando lo stesso elettromagnete agisce su di un liquido dei più attivi da me posseduti, hanno parvenza di lentezza molto maggiore. Ciò è constatabile alla chiusura del circuito dell'elettromagnete, e molto di più all'apertura. In questa seconda fase del fenomeno, accade spesso che la luce riapparsa per l'eccitazione del campo, non iscomparisca che dopo qualche secondo. Riflettendo alla diversa natura della rotazione Faraday e della birifrangenza

magnetica, è facile rendersi conto di questo fatto. Per il primo fenomeno, poichè si tratta di rotazioni che non superano qualche grado, l'intensità della luce apparsa cresce sempre, al crescere del campo. Ma nel caso della birifrangenza magnetica, essendo i liquidi adoperati molto attivi ed assorbenti, in guisa da lasciar passare solo luce quasi monocromatica (rossastra), all'eccitazione del campo si vede variare l'intensità luminosa periodicamente passando parecchie volte per dei massimi e dei minimi ben accentuati. Per conseguenza un campo magnetico di piccola intensità può bastare a provocare il passaggio della stessa quantità di luce che un campo intenso, e quindi una piccola variazione del campo è più facilmente osservabile studiando la birifrangenza magnetica, che non la rotazione Faraday. Se dunque il nuovo fenomeno ha l'apparenza di notevole lentezza all'interruzione del campo, ciò è spiegabile ammettendo che il magnetismo residuo del ferro metta un tempo lungo a scomparire, e che d'altra parte esso non sia capace di generare sensibile rotazione nel piano di polarizzazione di un raggio luminoso parallelo al campo, traversante un liquido con potere rotatorio magnetico.

Ammessa la giustezza delle precedenti considerazioni, si rende ancora più interessante la ricerca di esperienze dirette atte a constatare la rapidità o la lentezza reale della birifrangenza magnetica, ed è ad esse che voglio accennare in questa Nota. Il metodo da me seguìto è simile a quello adoperato da Abraham e Lemoine per lo studio del fenomeno Kerr elettrostatico. Si tratta di generare un campo magnetico capace di rendere birifrangente una soluzione attiva, mediante la scarica di un condensatore, e studiare se vi è la possibilità di osservare il fenomeno adoperando come sorgente luminosa la stessa scintilla di scarica ottenuta dal condensatore. Sono infatti riuscito in questo intento adottando una disposizione che schematicamente è indicata dalla figura. Il condensatore C, le cui dimensioni saranno indicate in seguito, è continuamente caricato da una macchina ad influenza, in guisa che fra le palline dello spinterometro S scocca a intervalli (qualche secondo) una energica e brillante scintilla di 15 mm. di lunghezza. La scarica del condensatore è obbligata a traversare una corta spirale R di filo di rame grosso 1 mm. che circonda una provetta cilindrica di vetro V di 10 mm. di diametro a pareti sottili, e in cui si trova del ferro Bravais attivo per birifrangenza magnetica. Poichè sarebbe impossibile obbligare la scarica a percorrere la spirale R, se questa venisse lasciata scoperta, occorre masticiare accuratamente le singole spire con ceralacca, fissandole senz'altro sulle pareti esterne della provetta, ed è così che ho potuto sovrapporre alle spire segnate in figura, delle altre in guisa che il loro numero totale, nella lunghezza $l = 20$ mm., fosse di 18. Chiudendo in corto circuito la spirale R, col contatto H, la scarica non agisce più magneticamente sul liquido. Alla provetta V sono saldati due corti tubetti di vetro T chiusi da due lastrine di vetro monorifrangente. La luce della scintilla S polarizzata dal nicol P, traversa il liquido

della provetta secondo TT, normalmente alle linee di forza del campo magnetico generato per la scarica dalla spirale R; l'analizzatore A permette di osservare la eventuale birifrangenza generata dal campo.

Certamente nel mettere insieme questa esperienza non è da sperarsi di ottenere effetti molto notevoli, sia per il valore non troppo grande del campo



magnetico, che per la piccola intensità luminosa della scintilla S. Per cui è bene mettersi subito nelle migliori condizioni cominciando coll'adoperare del ferro Bravais del più attivo. Esso, come è noto, è quello del terzo tipo; il suo punto di inversione è piuttosto basso (1550 u.) e il valore approssimativo della costante K è 0,0000048. Essendo corto lo spessore sottoposto all'esperimento, il liquido viene adoperato con concentrazione piuttosto grande (dens. 1,008). In una esperienza preliminare comincio col sostituire alla luce della scintilla S, la luce solare e posti i nicol a 45° sul campo (le linee di forza sono verticali) ed incrociati, si mette in azione la macchina elettrica. È a questo punto che occorre studiare la più conveniente capacità del condensatore C. Sperimentando in principio con piccoli valori di questa capacità, e successivamente con valori crescenti, riconosco che quando C è costituito da due grandi bottiglie di Leyda, il cui sviluppo complessivo delle armature interne od esterne è di m. q. 0,6, essendo lo spessore medio del vetro di circa 2 mm., ogni volta che si sente scoccare una scintilla nello spinterometro, uno sprazzo di luce solare traversa l'analizzatore. Il fenomeno è massimo per la indicata posizione dei nicol a 45° sull'asse della spirale, è nullo se il piano di polarizzazione è normale o parallelo a quell'asse, ed in ogni caso cessa se si stabilisce il contatto tra i capi H. Per cui nel breve tempo che dura la scarica, il ferro dializzato è divenuto birifrangente, e la

durata del fenomeno è sensibilmente istantanea. Onde andare avanti in questo studio, sostituisco alla luce solare la luce della scintilla S, ma poichè essa è molto più debole della prima, debbo aumentare la grandezza del condensatore C, raddoppiandola all'incirca (sviluppo delle armature m. q. 1,3), ottenendo così un conveniente aumento sia dell'intensità luminosa di S, che del campo magnetico in V. In queste condizioni, uno sprazzo luminoso proveniente da S, traversa, finchè il circuito H non è chiuso, l'analizzatore.

Adoperando sia la luce solare che quella della scintilla, si può compensare la birifrangenza. Interponendo tra i due nicol, oltre alla vaschetta V, un pezzo di vetro (negativo per compressione), si può, comprimendolo parallelamente alle linee di forza, ossia verticalmente, far sì che, nel caso della luce solare, questa colpisca l'occhio dell'osservatore finchè non scoccano scintille in S (H è aperto), e resti invece bruscamente indebolita quando passa la scarica. Con tale disposizione non si arriva mai a vedere l'assoluta estinzione della luce, a causa della persistenza delle immagini sulla retina; ma in ogni modo ciò è sicuro indizio che la birifrangenza generata è *positiva*. Si può sperimentare in migliori condizioni adoperando la luce della scintilla S; in tal caso, se il vetro è convenientemente compresso, si riesce a non vedere più la scintilla attraverso l'analizzatore; essa ricomparisce al nostro occhio non appena si stabilisce il contatto H. È difficile procedere in tali condizioni ad una buona misura dei valori di questa birifrangenza, ma in ogni modo posso dire che essa non supera i 4 o 5 centesimi di lunghezza d'onda nel rosso, e tenendo conto del suo segno, si intende che il fenomeno rimane, per l'azione del campo generato dalla scarica, al disotto del punto di inversione. La intensità del campo, calcolata dai dati dell'esperienza, non consentirebbe del resto, anche se essa fosse permanente e non istantanea, valori della birifrangenza superiori al riportato.

Dalle precedenti esperienze si deduce esser certo che già nel tempo in cui dura la scintilla S, il liquido è birifrangente; e si può anche concludere che *l'inizio della birifrangenza è contemporaneo all'inizio della luminosità della scintilla*. Se così non fosse, non sarebbe possibile compensare, come è stato detto, la birifrangenza istantanea, giacchè nel primo istante in cui la scintilla emette luce, non essendo ancora il liquido birifrangente, il compensatore a vetro compresso avrebbe un'azione depolarizzante sulla luce che cade sull'analizzatore.

Per completare queste ricerche, sarebbe stato desiderabile accertarsi se anche la scomparsa della birifrangenza segua immediatamente quella del campo magnetico, benchè sia prevedibile che a una tal questione si debba probabilmente, come per la rapidità dell'inizio, rispondere affermativamente. Mediante un sistema di specchi e di lenti non segnati in figura, ho allungato il percorso che la luce proveniente da S è costretta a seguire prima di arrivare in T. Nelle esperienze descritte esso era di un metro; avendolo portato

a 35 metri, malgrado l'indebolimento inevitabile del fascio luminoso, sono riuscito a constatare ancora, benchè più debolmente, la birifrangenza del liquido. Ma questa esperienza, la quale avrebbe dovuto avere lo scopo di creare un ritardo tra la formazione del campo e la propagazione della luce nel liquido, non ha molto valore, giacchè la durata complessiva della scarica è evidentemente grande rispetto al piccolo tempo che pone la luce a percorrere la distanza di 35 metri. Non potendo d'altra parte indebolire troppo le dimensioni del condensatore C e quindi la intensità luminosa della scintilla S, a causa del grande potere assorbente del ferro Bravais adoperato, sarebbero state necessarie ulteriori esperienze, come p. es. lo studio con uno specchio girante della luce di S, sia direttamente che attraverso il sistema dei nicol e del liquido sottoposto all'azione del campo magnetico della scarica. Esigendo questo studio una montatura sperimentale complicata, e non avendo per quest'anno altro tempo a mia disposizione, ho dovuto, almeno per ora, rinunziarvi.

PERSONALE ACCADEMICO

Giunse all'Accademia la dolorosa notizia della morte del Socio nazionale Generale Annibale Ferrero, mancato ai vivi il 7 agosto 1902; apparteneva il defunto Socio all'Accademia sino dal 12 novembre 1883.

V. C.